

УДК 629.332

С.С. Шадрин

канд. техн. наук, доц., МАДИ,

тел.: +7(925)507-81-91,

e-mail: shadrin@madi.ru

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ
ПРОЦЕССА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ПНЕВМАТИЧЕСКОЙ ШИНЫ
С ОПОРНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ**

Аннотация. В статье рассматривается процесс создания математической модели, описывающей взаимодействие пневматической шины с опорной поверхностью, для использования в составе комплексных программ моделирования динамики движения автотранспортных средств. Приводится пример программной реализации в среде MatLab Simulink.

Ключевые слова: математическая модель колеса с пневматической шиной, имитационное моделирование динамики движения автотранспортных средств.

Введение

При создании имитационной математической модели движения колесного транспортного средства наиболее важной задачей является достоверное описание физики взаимодействия пневматической шины с опорной поверхностью для определения сил, действующих в пятне контакта. Исходными параметрами для расчетов одиночного колеса являются: коэффициенты относительного проскальзывания, коэффициенты сцепления и угол увода [1].

Расчет коэффициентов относительного проскальзывания

В случае, когда автомобиль движется без увода, скоростью проскальзывания является разность окружной скорости колеса $V_{Rij} = \omega_{ij} \cdot r_{stat}$ (эквивалентной линейной скорости центра диска колеса, соответствующей свободному режиму качения без увода с угловой скоростью ω_{ij}) и линейной скорости центра диска колеса, спроецированной на опорную поверхность (в рассматриваемом случае $V_{wij} = V_{CoG}$).

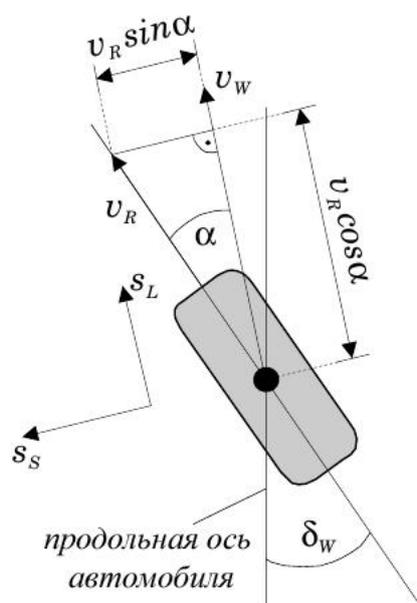


Рис. 1. Расчетная схема коэффициентов относительного проскальзывания

При введении понятий скоростей проскальзывания в продольном и поперечном направлениях в специализированной литературе встречаются разные подходы. Так, Буркхард [Burckhardt] определяет продольные направления силы, действующей в пятне контакта пневматической шины с опорной поверхностью, и скорости проскальзывания как соответствующие направлению движения колеса (см. рис. 1) [2], в то время как Раймпель [Reimpell] в качестве продольного направления выбирает непосредственно продольную ось колеса [3]. Мы будем использовать подход Буркхарда.

Таким образом, продольное направление вектора скорости проскальзывания определено в направлении линейной скорости центра диска колеса, спроецированной на опорную поверхность (\vec{V}_{wij}).

Формулы для расчета коэффициентов относительного проскальзывания в продольном и поперечном направлениях для разных режимов движения представлены в таблице 1.

Таблица 1

Расчет коэффициентов относительного проскальзывания

	тормозной режим $V_R \cdot \cos\alpha \leq V_W$	тяговый режим $V_R \cdot \cos\alpha > V_W$
Коэффициент относительного проскальзывания в продольном направлении – S_L	$S_L = \frac{V_R \cdot \cos\alpha - V_W}{V_W}$	$S_L = \frac{V_R \cdot \cos\alpha - V_W}{V_R \cdot \cos\alpha}$
Коэффициент относительного проскальзывания в поперечном направлении – S_S	$S_S = \frac{V_R \cdot \sin\alpha}{V_W}$	$S_S = \tan\alpha$

Отметим, что коэффициент относительного проскальзывания в продольном направлении S_L в зависимости от режима движения может принимать значения от -1 до $+1$ включительно. Достигается это за счет того, что разности скоростей (табл. 1) делятся на соответствующие большие значения скоростей, т.е. для тормозного режима движения в знаменателе присутствует значение скорости V_W , в то время как для тягового режима – $V_R \cdot \cos\alpha$. Коэффициент общего относительного проскальзывания колеса принимает значения от 0 до $+1$ включительно и рассчитывается по формуле:

$$S_{Res} = \sqrt{S_L^2 + S_S^2}. \quad (1)$$

Расчет коэффициентов сцепления пневматической шины с опорной поверхностью

Коэффициент сцепления может быть определен как отношение силы сцепления, действующей в пятне контакта пневматической шины с опорной поверхностью, к вертикальной нагрузке, действующей со стороны колеса на опорную поверхность:

$$\mu_{Res} = \frac{F_{fric}}{F_Z}. \quad (2)$$

Расчет коэффициента сцепления в функции общего относительного проскальзывания колеса предлагается выполнять с использованием метода Буркхарда [2]:

$$\mu_{Res}(S_{Res}) = c_1 \cdot (1 - \exp(-c_2 \cdot S_{Res})) - c_3 \cdot S_{Res}. \quad (3)$$

Выражение (3) может быть дополнено коэффициентом c_4 , описывающим условие движения автомобиля с высокими скоростями, и коэффициентом c_5 , характеризующим повышенную вертикальную нагрузку на колесо. Оба коэффициента могут принимать максимальное значение, равное 1, и приводят к снижению коэффициента сцепления. Неправильно выставленное давление в пневматических шинах также может приводить к снижению коэффициента сцепления, однако, этим эффектом можно пренебречь при колебаниях давления в пределах $0,3 \text{ кгс/см}^2$. С учетом изложенного, выражение (3) может быть представлено следующим образом:

$$\begin{aligned} \mu_{Res}(S_{Res}) = & (c_1 \cdot (1 - \exp(-c_2 \cdot S_{Res})) - \\ & - c_3 \cdot S_{Res}) \cdot \exp(-c_4 \cdot S_{Res} \cdot V_{CoG}) \cdot (1 - c_5 \cdot F_Z^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Значения коэффициентов c_1 , c_2 и c_3 для различных типов покрытий опорной поверхности представлены в табл. 2 [1, 2, 4]. Коэффициент c_4 принимает значения от $0,02 \text{ с/м}$ до $0,04 \text{ с/м}$. К примеру, для коэффициента общего относительного проскальзывания $0,1$ (10%) и скорости движения

автомобиля 20 м/с (72 км/ч) общий коэффициент сцепления уменьшается примерно на 8%. Коэффициент $c_5 = 0,0015 (1 / \kappa H)^2$ и динамическое изменение вертикальной нагрузки до 8 кН приведет к уменьшению коэффициента сцепления на 9,6% [1].

Таблица 2

Значения коэффициентов c_i

Тип дорожного покрытия	c_1	c_2	c_3
сухой асфальт	1,2801	23,99	0,52
мокрый асфальт	0,857	33,822	0,347
сухой бетон	1,1973	25,168	0,5373
сухой гравий	1,3713	6,4565	0,6691
мокрый гравий	0,4004	33,708	0,1204
снег	0,1946	94,129	0,0646
лед	0,05	306,39	0

Графическое представление функций зависимости коэффициента сцепления от общего относительного проскальзывания для разных типов покрытий показано на рис. 2 и относится только к квазистатическим режимам движения автомобиля, т.е. не описывает быстро меняющиеся динамические процессы. Анализ зависимости во времени боковых реакций в пятне контакта пневматических шин с опорной поверхностью от быстро изменяющихся углов увода представлен в источниках [1], [5] и [6].

Направление вектора общего относительного проскальзывания совпадает с направлением действия силы сцепления, исходя из чего вводятся понятия коэффициентов сцепления в продольном и поперечном направлениях, вычисляемые по формулам:

$$\mu_L = \mu_{Res} \cdot \frac{S_L}{S_{Res}} \text{ и } \mu_S = \mu_{Res} \cdot \frac{S_S}{S_{Res}}. \quad (5)$$

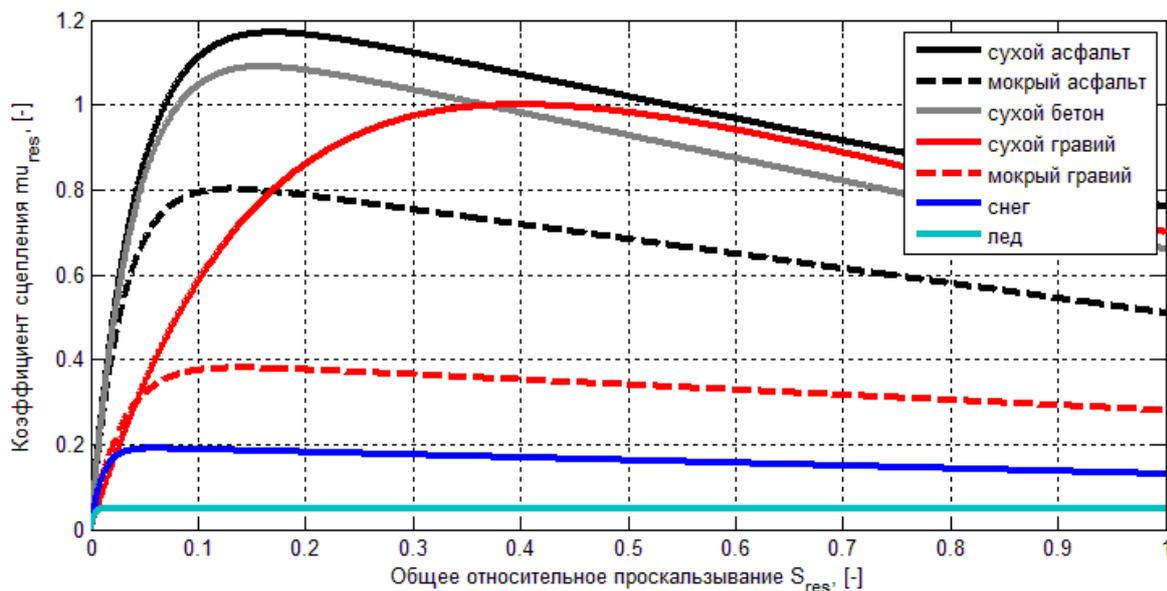


Рис. 2. Характеристики коэффициента сцепления

На рисунке 3 изображена так называемая «окружность Камма», иллюстрирующая условное распределение общего коэффициента сцепления на коэффициенты сцепления в продольном и поперечном направлениях. Пятно контакта пневматической шины с опорной поверхностью, скорость автомобиля и нагрузка на колесо определяют максимальное значение коэффициента сцепления $\mu_{Res,MAX}$, который условно может быть распределен на коэффициенты сцепления в продольном и поперечном направлениях. Знаки коэффициентов сцепления будут определять направления действия соответствующих сил.

Отметим, что при наличии у пневматической шины направленного протектора максимальный коэффициент сцепления в продольном направлении будет больше максимального коэффициента сцепления в поперечном направлении, в связи с чем окружность Камма трансформируется в эллипс. Данное обстоятельство может быть учтено в формулах (5) введением коэффициента k_S , тогда:

$$\mu_L = \mu_{Res} \cdot \frac{S_L}{S_{Res}} \text{ и } \mu_S = k_S \cdot \mu_{Res} \cdot \frac{S_S}{S_{Res}}. \quad (6)$$

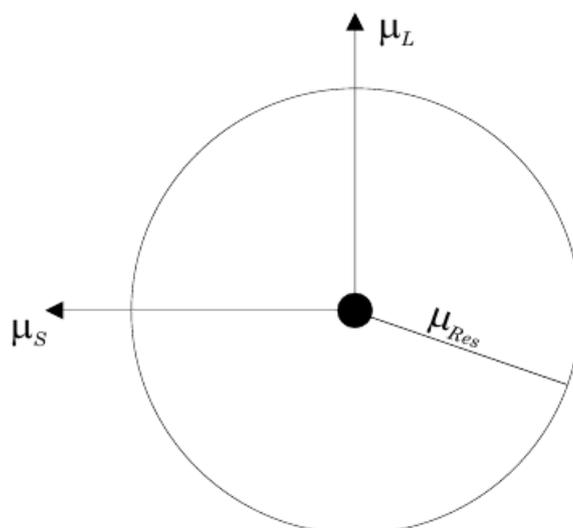


Рис. 3. Окружность Камма

При $k_s = 1$ формулы (5) и (6) становятся идентичными. Обычно для низкопрофильных шин коэффициент k_s принимает значения от 0,9 до 0,95 [1]. Коэффициенты сцепления могут меняться при интенсивном разгоне и торможении, но эти эффекты в данном случае не рассматриваются. Окружность Камма позволяет определить максимально возможную силу сцепления в пятне контакта, абсолютное значение которой не может быть превышено фактически реализуемыми силами, т.е.:

$$\sqrt{F_{WLij}^2 + F_{WSij}^2} \leq \mu_{Res} \cdot F_{Zij}. \quad (7)$$

На следующих трех рисунках показаны характеристики сцепления пневматических шин в зависимости от углов увода для сухого асфальта. Отметим, что на практике углы увода не являются постоянными величинами и изменяются в процессе торможения или при криволинейном движении.

На рисунке 4 показана зависимость коэффициентов сцепления пневматической шины в поперечном направлении от коэффициентов сцепления в продольном направлении для разных значений углов увода. Боковая реакция в пятне контакта пневматической шины с опорной поверхностью не возникает при отсутствии угла увода, в связи с чем, на

рис. 4 кривая, соответствующая углу увода в 0° расположена на оси абсцисс. При наличии угла увода в 2° появляется возможность реализации коэффициента сцепления в поперечном направлении вплоть до значения $\mu_s = 0,7$, так как относительное проскальзывание в поперечном направлении уже достигает $S_s = 3,5\%$, что и обеспечивает высокое сцепление на сухих опорных поверхностях. На рисунке 4 показано, что увеличение угла увода приводит к уменьшению продольного коэффициента сцепления.

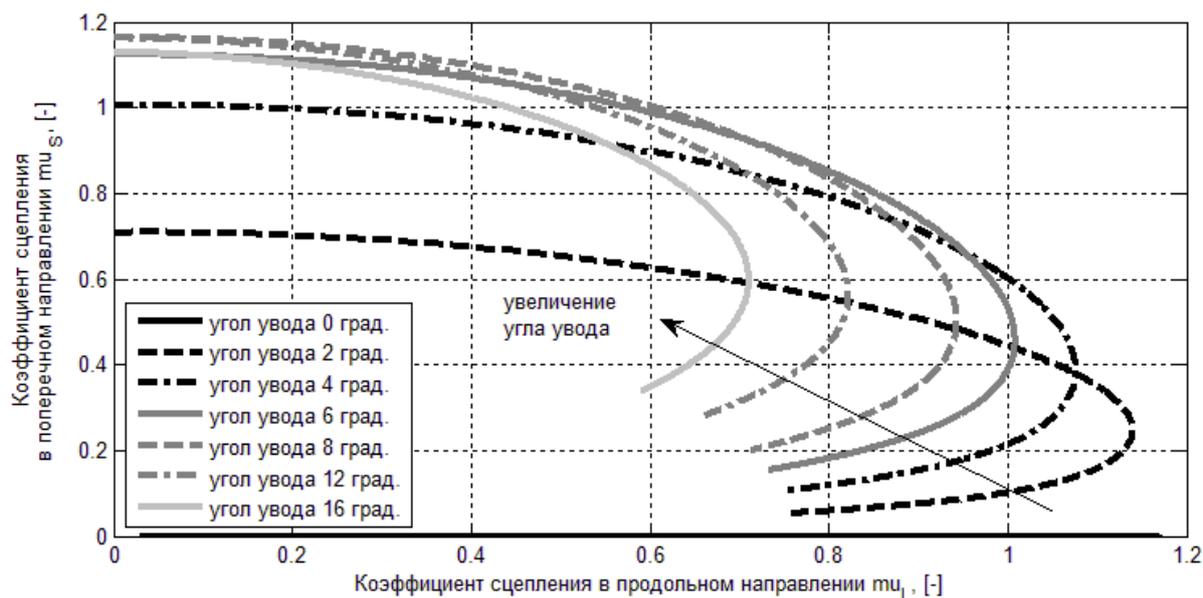


Рис. 4. Характеристики коэффициентов сцепления

На рисунке 5 изображены функции продольного коэффициента сцепления от продольного относительного проскальзывания в зависимости от изменяющихся углов увода. При торможении в повороте происходит уменьшение продольного коэффициента сцепления и увеличение тормозного пути, при этом угол увода вызывает появление боковой реакции в пятне контакта и изменение траектории движения. Максимальный угол поворота управляемых колес зависит от типа транспортного средства и обычно составляет примерно 30° . Для

устойчивых режимов движения автомобиля углы увода не превышают 16° , в таком же диапазоне находится и угол рысканья.

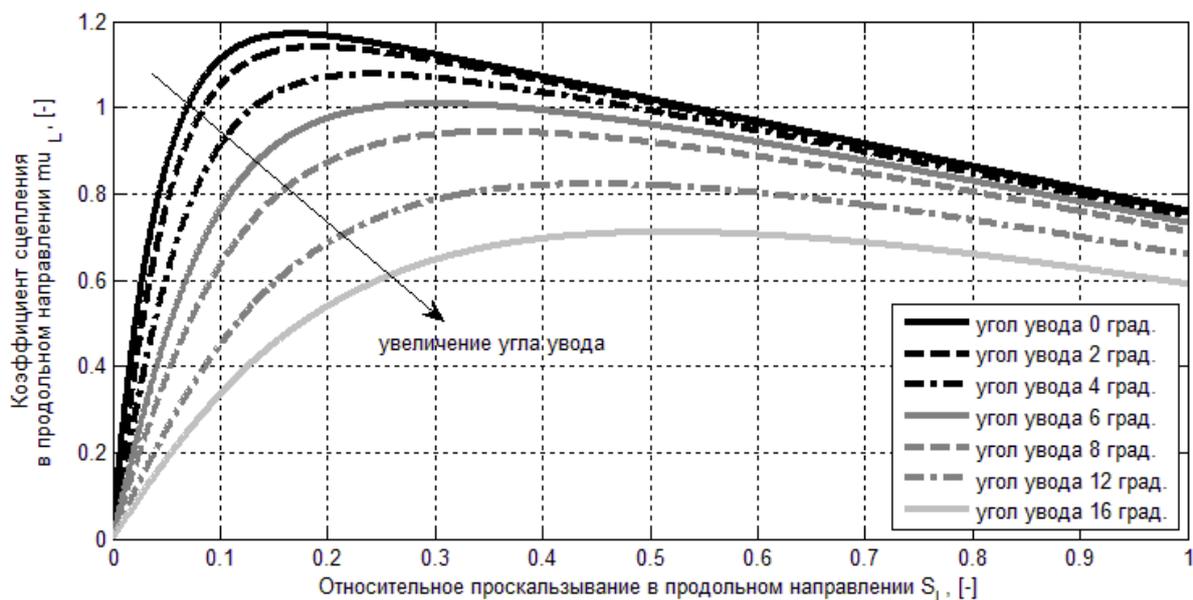


Рис. 5. Характеристики продольного коэффициента сцепления

На рисунке 6 изображены функции поперечного коэффициента сцепления от продольного относительного проскальзывания в зависимости от изменяющихся углов увода. При повороте без торможения возможна реализация максимального поперечного коэффициента сцепления. При угле увода примерно в 8° μ_s достигает максимального значения. При увеличении продольного относительного проскальзывания S_L резкое падение значений поперечного коэффициента сцепления лишь частично может быть компенсировано увеличением угла увода.

Графики, показанные на рисунках 2, 4, 5, 6 были построены по зависимостям (1), (2), (3), (5) в среде MatLab [7]. На рисунке 7 показана реализация расчета коэффициентов сцепления пневматической шины с опорной поверхностью на языке графического программирования MatLab Simulink.

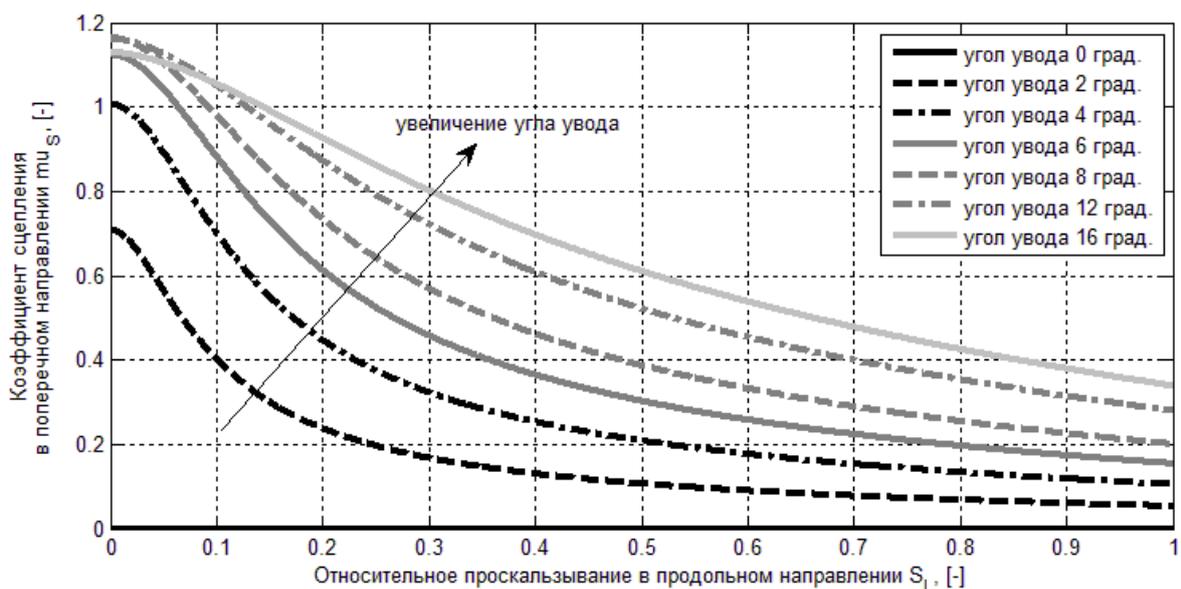


Рис. 6. Характеристики поперечного коэффициента сцепления

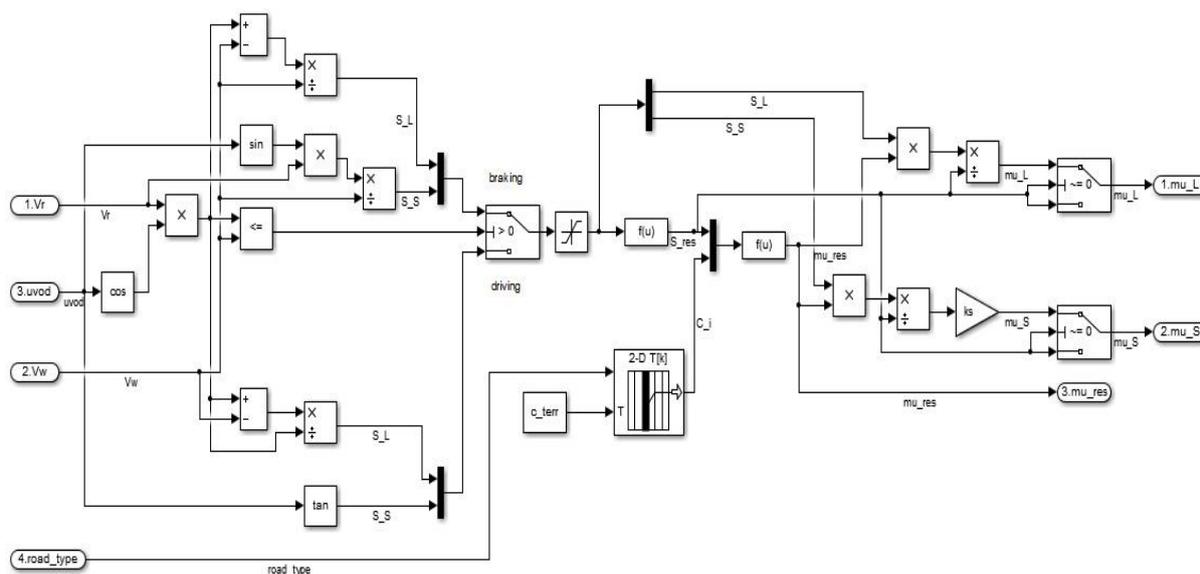


Рис. 7. Подпрограмма расчета коэффициентов сцепления в MatLab Simulink

На рисунке 8 представлена имитационная модель Simulink автомобильного колеса для использования в составе комплексных программ моделирования динамики движения автотранспортных средств.

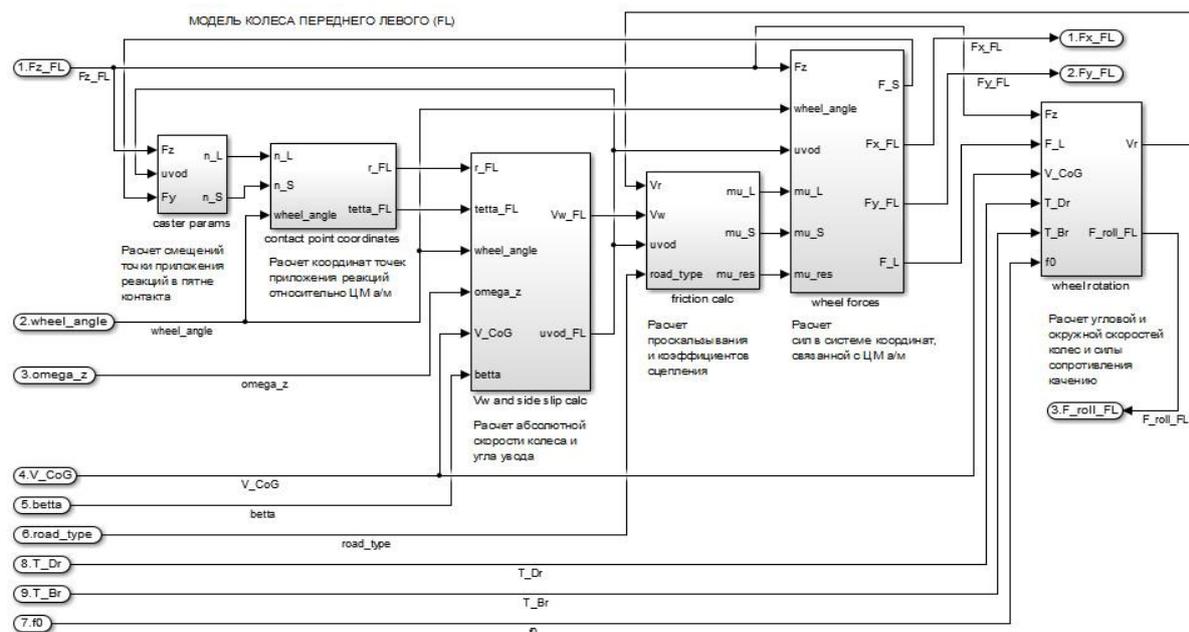


Рис. 8. Схема Simulink математической модели автомобильного колеса

Результаты и выводы

В результате проведенной работы была разработана математическая модель, описывающая взаимодействие пневматической шины с опорной поверхностью, и создана ее программная реализация в среде MatLab Simulink для использования в составе комплексных программ моделирования динамики движения автотранспортных средств. Полученные результаты могут использоваться в учебном процессе при подготовке студентов [8] и аспирантов профильных специальностей.

Литература

1. Kiencke, U. and L. Nielsen, 2005. Automotive Control Systems – For Engine, Driveline, and Vehicle. Second edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 512 p.
2. Burckhardt M. Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme. Vogel Fachbuch, Würzburg, 1993.
3. Reimpell J. and Sponage P. Fahrwerktechnik: Reifen und Räder. Vogel Fachbuch, Würzburg, 1995.

4. Mitschke M. and Wallentowitz H. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer Verlag, Berlin, 4 edition, 2004.
5. Ammon D. *Radlastschwankungen, Seitenführungsvermögen und Fahrsicherheit*, volume 1088 of VDI Fortschrittberichte. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993.
6. Шадрин С.С. Методика расчетной оценки управляемости и устойчивости автомобиля на основе результатов полигонных испытаний: дис. ... канд. техн. наук. М.: МАДИ. М., 2009. 132 с.
7. Shadrin S.S., Ivanov A.M., Prikhodko V.M. Experimental and calculated procedure for determining the adhesion properties of the vehicle pneumatic tires in use // *Adv. Environ. Biol.*, 2014. No. 8 (13) S. 294–297.
8. Sergey Sergeevich Shadrin, Andrey Mikhailovich Ivanov, Vyacheslav Mikhailovich Prikhodko, Usage of Smartphones in the Education Process of MADi during Vehicle Road Tests Conduction // *Modern Applied Science*, 2015, Vol. 9. No. 1. S. 83–88.

References

1. Kiencke U. and Nielsen L. *Automotive Control Systems – For Engine, Driveline, and Vehicle*. Second edition. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2005, p. 512.
2. Burckhardt M. *Fahrwerktechnik: Radschlupf-Regelsysteme*. Vogel Fachbuch, Würzburg, 1993.
3. Reimpell J. and Sponagel P. *Fahrwerktechnik: Reifen und Räder*. Vogel Fachbuch, Würzburg, 1995.
4. Mitschke M. and Wallentowitz H. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Springer Verlag, Berlin, 4 edition, 2004.
5. Ammon D. *Radlastschwankungen, Seitenführungsvermögen und Fahrsicherheit*, volume 1088 of VDI Fortschrittberichte. VDI Verlag, Düsseldorf, 1993.

6. Shadrin, S.S. *Metodika raschetnoj ocenki upravljajemosti i ustojchivosti avtomobilja na osnove rezul'tatov poligonnyh ispytanij*, dis. ... kand. tehn. nauk, Moscow, MADI. M., 2009. 132p.

7. Shadrin S.S., Ivanov A.M., Prikhodko V.M. *Experimental and calculated procedure for determining the adhesion properties of the vehicle pneumatic tires in use*. Adv. Environ. Biol., 2014, no. 8 (13), pp. 294–297.

8. Shadrin S.S., Ivanov A.M., Prikhodko V.M. *Usage of Smartphones in the Education Process of MADI during Vehicle Road Tests Conduction*. Modern Applied Science, 2015, vol. 9, no. 1, pp. 83–88.

S. Shadrin

Mathematical modeling of the process of pneumatic tire with ground surface interaction

Abstract. The article discusses the process of creating a mathematical model describing the interaction of the pneumatic tire with ground surface, for use in complex programs of vehicles driving dynamics simulations. An example of a software implementation in the MatLab Simulink is given.

Key words: pneumatic tire mathematical model, vehicle dynamics simulation.