

УДК 629.3.016

Колесникова Галина Петровна, ст. преподаватель,
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, kolesnikovagp@mail.ru

**ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИТИЧЕСКОГО
МОДЕЛИРОВАНИЯ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ АТС
ПРИ КОСОМ НАЕЗДЕ НА БОКОВЫЕ ТРОСОВЫЕ ОГРАЖДЕНИЯ**

Аннотация. В статье представлены два метода аналитического построения траектории движения автомобильного транспортного средства посредством полиномиального приближения; оценена сходимость предлагаемых алгоритмов с методом, описанным в [1] (гармоническое приближение). Данная статья продолжает данное исследование.

Приближенное построение траекторий позволяет быстрее в сравнении с построением и расчетом модели МКЭ исследовать движение автомобильного транспортного средства, облегчает работу по оценке эффективности работы факторов внутренней безопасности, а также помогает провести проверку корректности разрабатываемой модели МКЭ.

Ключевые слова: тросовое ограждение, математическое моделирование, траектория движения.

Kolesnikova Galina P., senior lecturer,
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, kolesnikovagp@mail.ru

**APPROXIMATE METHODS OF ANALYTICAL MODELING
OF THE TRAJECTORY OF MOTOR VEHICLE MOVEMENT
AT AN OBLIQUE HITTING THE SIDE OF A CABLE BARRIER**

Abstract. The article presents two methods of analytical construction of the trajectory of an automobile vehicle by means of a polynomial approximation; the convergence of the proposed algorithms is estimated with the method described in [1]. This article continues the research of [1].

The approximate construction of trajectories makes it possible to investigate the movement of an automobile vehicle faster, in comparison with the construction and calculation of the FEM model, to facilitate work on assessing the performance of internal security factors, and also helps to verify the correctness of the developed FEM model.

Key words: cable barrier, mathematical modeling, trajectory.

Введение

В работе [1] был предложен метод приближенного моделирования в следующей постановке задачи: автомобильное транспортное средство (АТС) (рис. 1) рассматривалось как материальная точка некоторой массы m [2]; начало отсчета декартовой системы координат соответствует точке начала контакта транспортного средства и ограждения. Движение материальной точки начинается со скоростью $\vec{v}_0$, проходящей под углом α к горизонту.

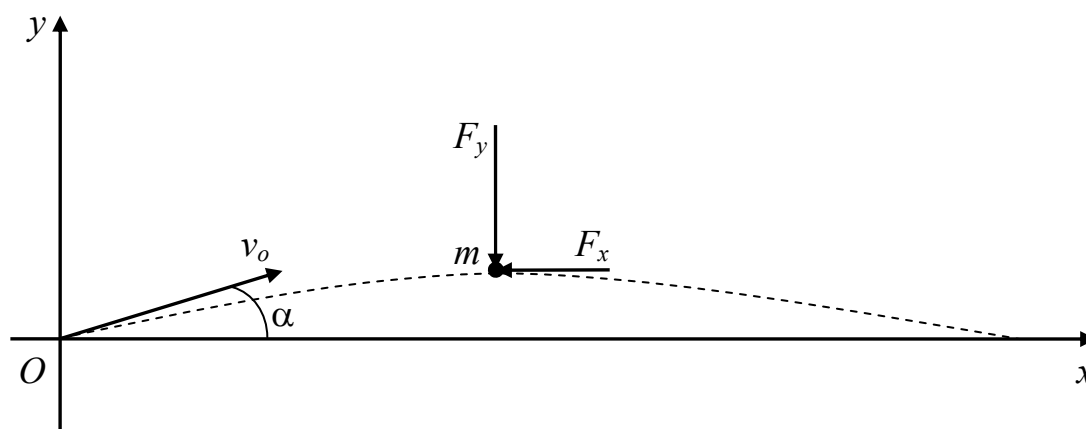


Рис. 1. Расчетная схема АТС

Противодействие движению транспортного средства со стороны тросового ограждения определялось силами:

1. При боковом отклонении вдоль оси y : силой упругости $P_y = -ky$ и диссипативным сопротивлением $P_y^{\text{дис}} = -b\dot{y}$.

2. Сопротивление движению вдоль оси x : силой трения $F_x = -fN$, причем N – сила инерционного давления, то есть $N = m\ddot{y}$.

В результате движение АТС описывалось системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \ddot{x} = -f \ddot{y}; \\ \ddot{y} + 2\epsilon\dot{y} + p^2 y = 0. \end{cases}$$

Решением системы являлись перемещения:

$$\begin{cases} x(t) = -f \frac{v_0 \sin \alpha}{p} e^{-\varepsilon t} \sin p t + v_0 (\cos \alpha + f \sin \alpha); \\ y(t) = \frac{v_0 \sin \alpha}{p} e^{-\varepsilon t} \sin p t. \end{cases}$$

Также было показано, что подбор параметров p и ε оказывается невозможным при нарушении достаточного условия. В этом случае рекомендовалось производить построение траектории, исходя из соотношений:

$$\begin{cases} x(t) = -f \frac{v_0 \sin \alpha}{p} \sin p t + v_0 (\cos \alpha + f \sin \alpha) t; \\ y(t) = \frac{v_0 \sin \alpha}{p} \sin p t. \end{cases}$$

Доказывалось, что при учете сил инерционного давления силой трения Кулона можно пренебречь.

Целью данной работы является представление методов моделирования с использованием полиномов второго и третьего порядка, что позволяет в первую очередь более точно строить траектории АТС при нарушении необходимого и достаточного условия метода гармонического приближения [1], а также сделать процесс построения траектории более быстрым и легким.

Постановка задачи

В отличие от [1] в настоящем исследовании противодействие движению АТС со стороны тросового ограждения при боковом отклонении вдоль оси y будем определять некоторой функцией $P_y(t)$, в результате интегрирования которой отклонение вдоль оси y имеет характер полинома второго либо третьего порядка; моделирование сопротивления движению вдоль оси x остается прежним.

Также сохраняются обозначения:

- время контакта транспортного средства и ограждения – τ , с;
- максимальный прогиб – Y^* , м;
- длина пути взаимодействия АТС с тросовым ограждением – $x(\tau)$, м.

Метод квадратичного приближения

Итак, пусть $y(t) = e^{-\varepsilon t} (a_1 t + a_2 t^2)$.

Для определения неизвестных параметров ε , a_1 , a_2 сформулируем следующие:

- начальные условия

$$\begin{cases} y(0) = 0, \text{ м}; \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha, \frac{\text{м}}{\text{с}}; \end{cases}$$

- краевые условия

$$\begin{cases} y(\tau) = 0, \text{ м}; \\ y(t^*) = y^*, \text{ м}; \\ \dot{y}(t^*) = 0, \frac{\text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 = v_0 \sin \alpha; \\ a_1 + a_2 \tau = 0; \\ \varepsilon t^* = \ln \frac{a_1 t^* + a_2 t^{*2}}{y^*}; \\ \varepsilon t^* = \frac{a_1 + 2a_2 t^*}{a_1 + a_2 t^*}. \end{cases}$$

Уравнение для определения времени t^* достижения максимального прогиба имеет вид:

$$\ln \frac{v_0 \sin \alpha \cdot t^* - \frac{v_0 \sin \alpha}{\tau} t^{*2}}{y^*} = 1 - \frac{t^*}{\tau - t^*}.$$

Далее вычисляется ε . Существование положительного значения ε определяется неравенством

$$t^* < \frac{\tau}{v_0 \sin \alpha}.$$

Отрицательный ε дает ложное моделирование перемещений АТС.

В результате получаем уравнения траектории и движения АТС:

$$\begin{cases} x(t) = -fy + v_0(\cos \alpha + f \sin \alpha)t; \\ y(t) = e^{-\varepsilon t} v_0 \sin \alpha \left(t - \frac{t^2}{\tau} \right). \end{cases}$$

Метод кубического приближения

Определим продольный прогиб соотношением

$$y(t) = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

Заметим, что, как и ранее, начальное условие $y(0) = 0$ выполнено.

Сформулированные выше начальные и краевые условия позволяют получить соотношения:

$$\begin{cases} a_1 = v_0 \sin \alpha; \\ a_1 + a_2 \tau + a_3 \tau^2 = 0; \\ a_1 t^* + a_2 t^{*2} + a_3 t^{*3} = Y^*; \\ a_1 + 2a_2 t^* + 3a_3 t^{*2} = 0. \end{cases}$$

Второе уравнение системы является квадратным относительно времени контакта τ транспортного средства и ограждения. Отсюда делаем предположение, что решение для τ должно существовать всегда и быть единственным. Значит, должно выполняться

$$(a_2)^2 = 4a_1 a_3.$$

Решая второе уравнение относительно τ , получаем

$$a_2 = -2 \frac{a_1}{\tau}.$$

Очевидно, что тогда

$$a_3 = \frac{(a_2)^2}{4a_1} = \frac{4\left(\frac{a_1}{\tau}\right)^2}{4a_1} = \frac{a_1}{\tau^2}.$$

Таким образом, моделируемая функция прогиба принимает вид

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \left(t - \frac{2}{\tau} t^2 + \frac{1}{\tau^2} t^3 \right).$$

Подставим полученные значения для коэффициентов a_2, a_3 в последнее уравнение системы

$$a_1 - 4 \frac{a_1}{\tau} t^* + 3 \frac{a_1}{\tau^2} t^{*2} = 0.$$

Получаем квадратное уравнение относительно t^*

$$1 - \frac{4}{\tau} t^* + \frac{3}{\tau^2} t^{*2} = 0.$$

Отсюда находим

$$t^* = \begin{cases} \tau \\ \tau/3 \end{cases}, \text{ с.}$$

Из физики движения АТС очевидно выбираем

$$t^* = \frac{\tau}{3}, \text{ с.}$$

Найденное решение для t^* имеет смысл, если выполняется третье уравнение описанной выше системы уравнений, то есть должно выполняться:

$$Y^* = \frac{4\tau}{27} v_0 \sin \alpha.$$

Это соотношение является проверочным при использовании алгоритма моделирования движения АТС.

Если оно не выполняется, то необходимо обратиться к решению системы линейных уравнений относительно коэффициентов a_1, a_2, a_3 :

$$\begin{cases} a_1 + a_2\tau + a_3\tau^2 = 0; \\ a_1t^* + a_2t^{*2} + a_3t^{*3} = Y^*; \\ a_1 + 2a_2t^* + 3a_3t^{*2} = 0. \end{cases}$$

В матричном виде эта система приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & \tau & \tau^2 \\ t^* & t^{*2} & t^{*3} \\ 1 & 2t^* & 3t^{*2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y^* \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что определитель матрицы системы линейных алгебраических уравнений равен

$$\Delta = t^{*3} - 3t^{*2}\tau + 2t^*\tau^2 + t^*\tau - \tau^2.$$

Находим

$$\begin{cases} a_1 = Y^* \frac{2\tau^2 - 3t^*\tau}{\Delta}; \\ a_2 = -Y^* \frac{\tau^2 - 3t^{*3}}{\Delta}; \\ a_3 = Y^* \frac{\tau - 2t^{*2}}{\Delta}. \end{cases}$$

Поскольку a_1 является уже известным, то определяем t^* из уравнения

$$v_0 \sin \alpha = Y^* \frac{2\tau^2 - 3t^*\tau}{t^{*3} - 3t^{*2}\tau + 2t^*\tau^2 + t^*\tau - \tau^2}.$$

Такой путь моделирования возможен, если Δ достаточно далек от нулевого значения. Иначе моделирование дает неправильные результаты.

Примеры расчета траектории АТС и их сравнение с результатами работы [1]

Согласно методике, изложенной в ГОСТ Р 52721-2007 (п. 6.1–6.6) [3], угол между продольной осью и направлением движения испытываемого АТС, используемый для его наведения, равен 20° .

По данным натурных испытаний [4] для АТС типа ГАЗ-3102 (год выпуска – 1998) $Y^* = 0,6$, м; $v_0 = 25$, м/с; длина пути взаимодействия $x(\tau) = 13$, м; $\tau = 0,5$, с.

Расчетные перемещения и траектория АТС, полученные посредством квадратичного приближения (рис. 2, 3):

$$\begin{cases} x(t) = -1,2825e^{-2,762t}(t - 2t^2) + 24,782t; \\ y(t) = 8,55e^{-2,762t}(t - 2t^2). \end{cases}$$

Результаты расчета перемещений и траектории с применением метода кубического приближения (рис.4, 5):

$$\begin{cases} x(t) = -1,2825(t - 4t^2 + 4t^3) + 24,782t; \\ y(t) = 8,55(t - 4t^2 + 4t^3). \end{cases}$$

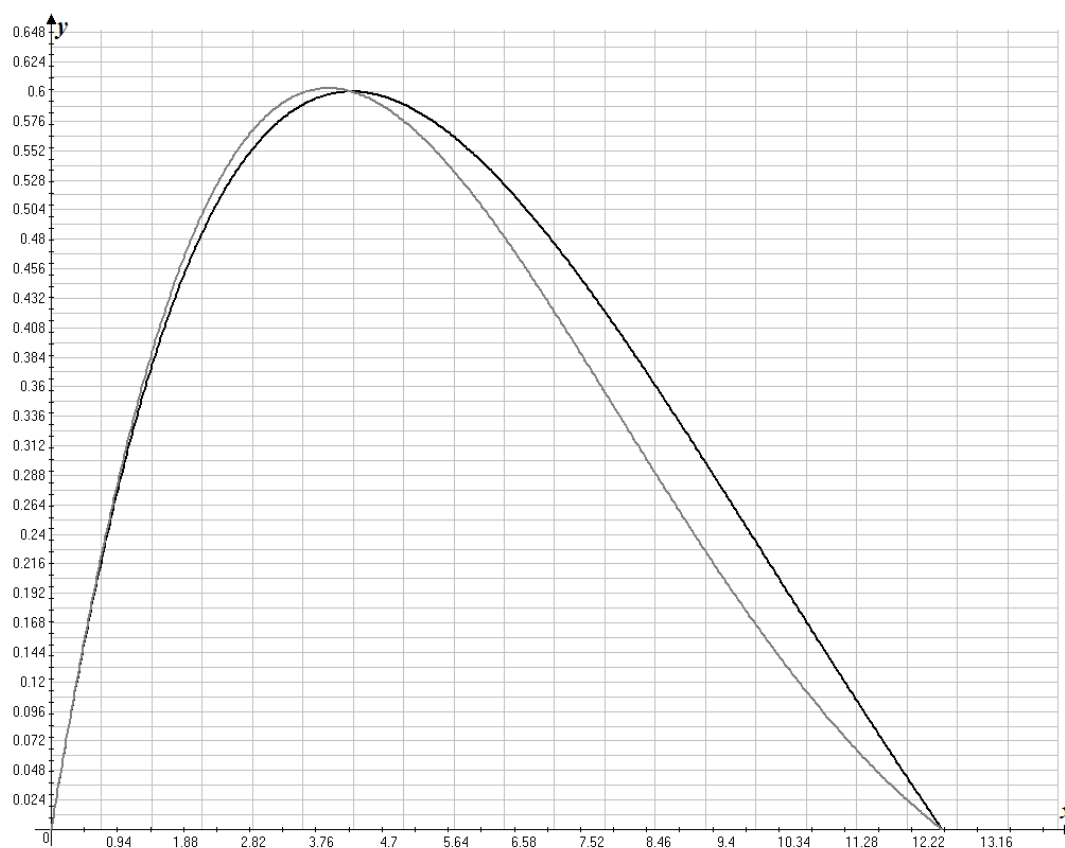


Рис. 2. Расчетная траектория АТС типа ГАЗ-3102:
черная линия – расчет методом квадратичного приближения;
сплошная серая линия – расчет, полученный в [1]
(гармоническое приближение)

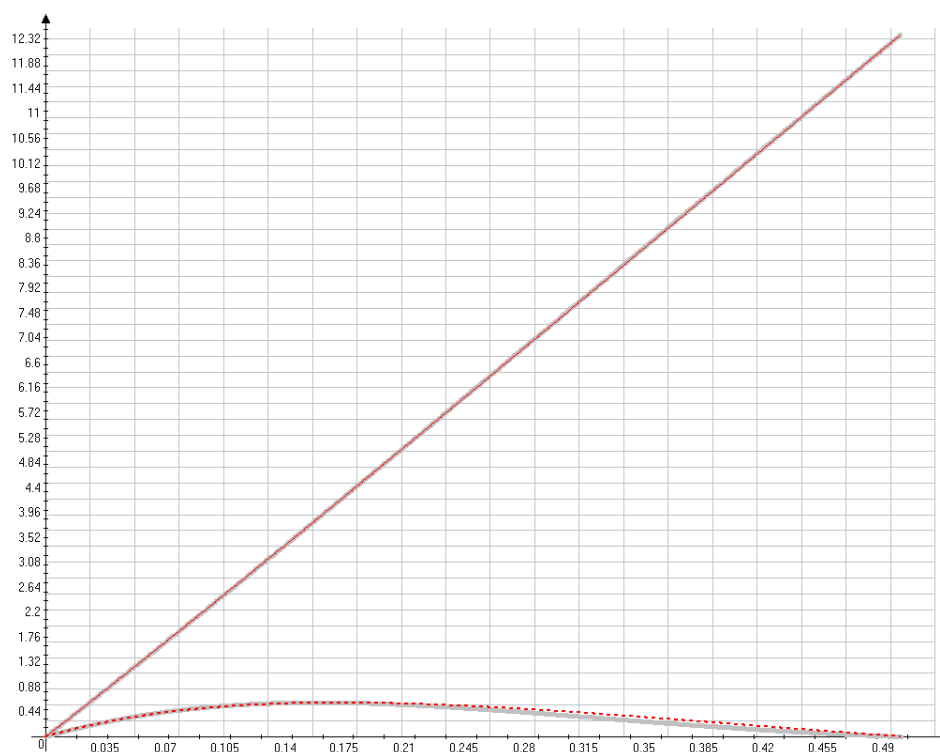


Рис. 3. Расчетные отклонения вдоль осей x (сплошная красная линия) и y (пунктирная красная линия), м, для АТС типа ГАЗ-3102 методом квадратичного приближения. Сплошные серые линии обозначают соответствующие расчетные перемещения, полученные в [1] (гармоническое приближение)

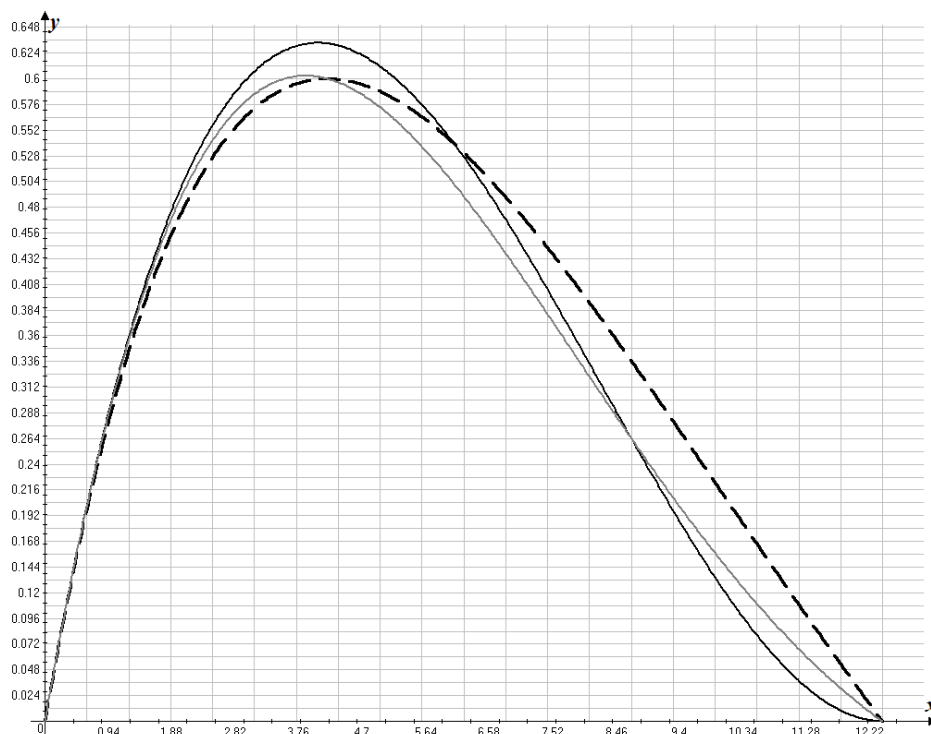


Рис. 4. Расчетная траектория АТС типа ГАЗ-3102:
черная линия — расчет методом кубического приближения;
черная пунктирная линия — расчет методом квадратичного приближения;
сплошная серая линия — расчет, полученный в [1] (гармоническое приближение)

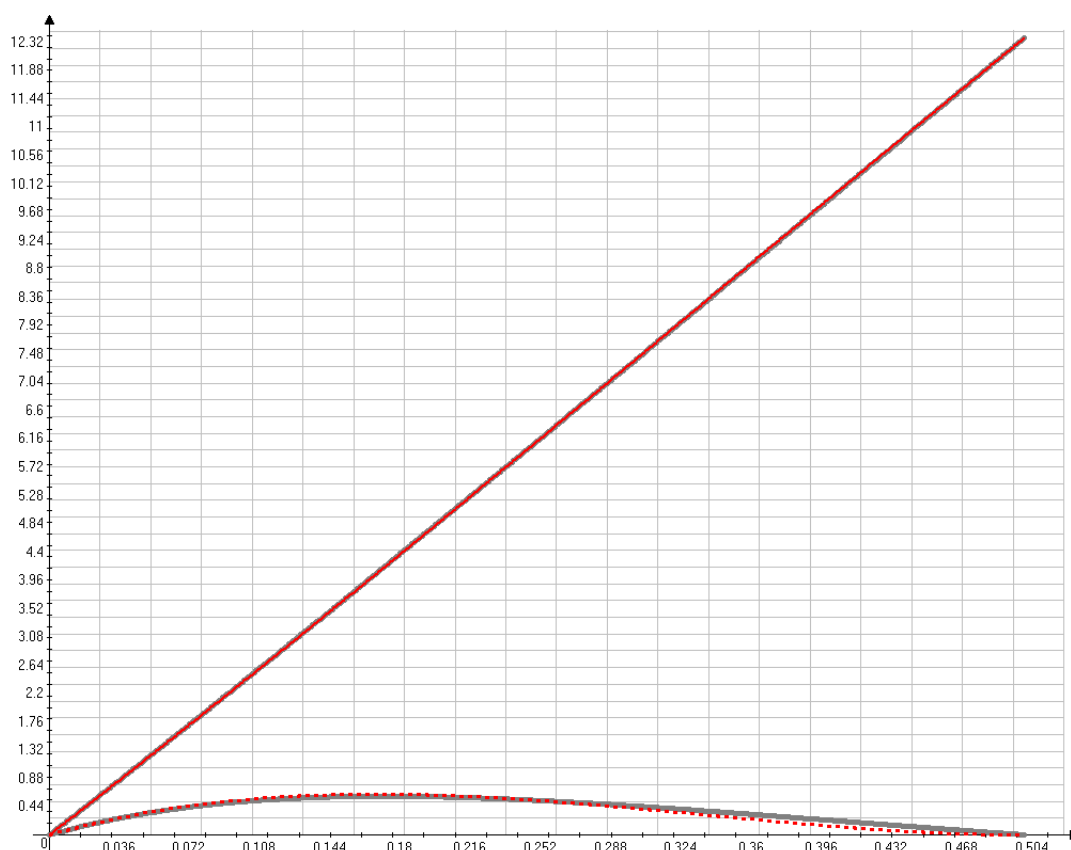


Рис. 5. Расчетные отклонения вдоль осей x (сплошная красная линия) и y (пунктирная красная линия), м, для АТС типа ГАЗ-3102 методом кубического приближения. Сплошные серые линии обозначают расчетные перемещения, полученные в [1] (гармоническое приближение)

Далее приведены расчетные данные по скоростям (рис. 6) и ускорениям (рис. 7) с использованием полиномиальных приближений в сравнении с расчетами, полученными в [1] (гармоническое приближение).

Погрешность ускорений квадратичного приближения составляет не более 20%.

Для АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345 данные испытаний: $Y^* = 1,5$, м; $v_0 = 19,4$, м/с; длина пути взаимодействия $x(\tau) = 25$, м; $\tau = 1,3$, с [4].

Расчеты гармонического приближения, полученные ранее в [1]:

$$\begin{cases} x(t) = -0,412e^{-1,081t}\sin(2,416t) + 19,1t; \\ y(t) = 2,746e^{-1,081t}\sin(2,416t). \end{cases}$$

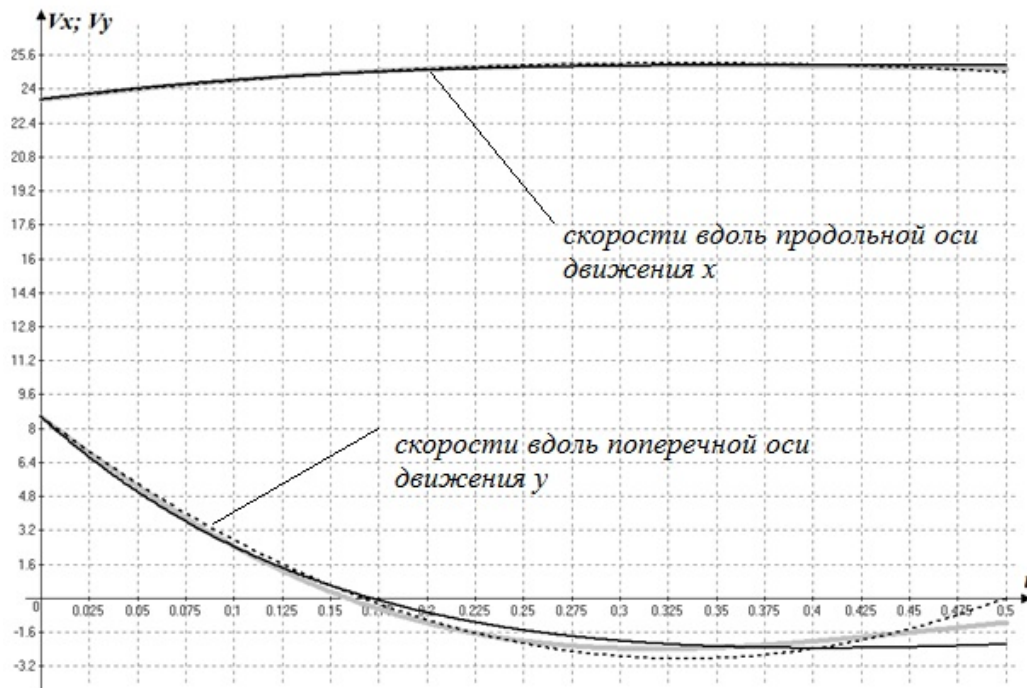


Рис. 6. Расчетные скорости АТС типа ГАЗ-3102:
черная пунктирная линия – кубическое приближение;
сплошная черная линия – квадратичное приближение;
сплошная серая линия – гармоническое приближение, полученное в [1]

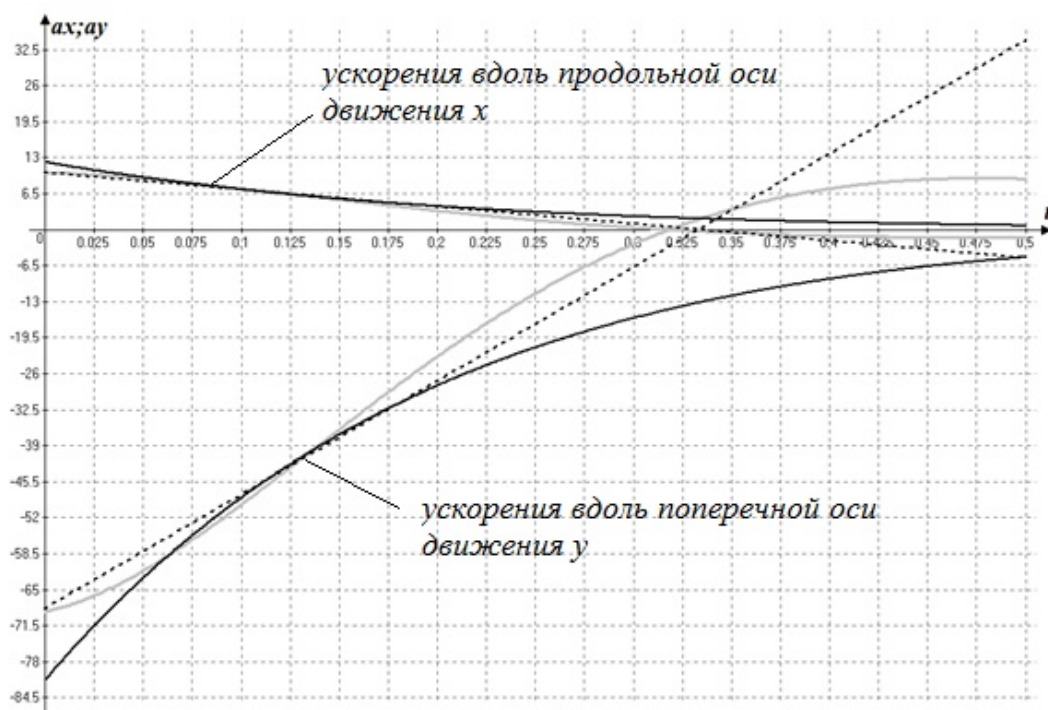


Рис. 7. Расчетные ускорения АТС типа ГАЗ-3102:
черная пунктирная линия – кубическое приближение;
сплошная черная линия – квадратичное приближение;
сплошная серая линия – гармоническое приближение, полученное в [1]

Расчетные траектория и перемещения АТС, полученные с помощью квадратичного приближения (рис. 8, 9):

$$\begin{cases} x(t) = -0,99525e^{-0,619t}(t - 0,769t^2) + 19,1t; \\ y(t) = 6,635e^{-0,619t}(t - 0,769t^2). \end{cases}$$

При расчете перемещений с использованием кубического приближения проверяем выполнение необходимого условия

$$Y^* = \frac{4\tau}{27} v_0 \sin \alpha \Rightarrow 1,5 \neq 1,278.$$

Однако отличие не столь значительно, поэтому проведем расчеты двумя способами.

Считая условия выполненными, получаем:

$$\begin{cases} x(t) = -0,99525e^{-0,619t}(t - 1,538t^2 + 0,455t^3) + 19,1t; \\ y(t) = 6,635e^{-0,619t}(t - 1,538t^2 + 0,455t^3). \end{cases}$$

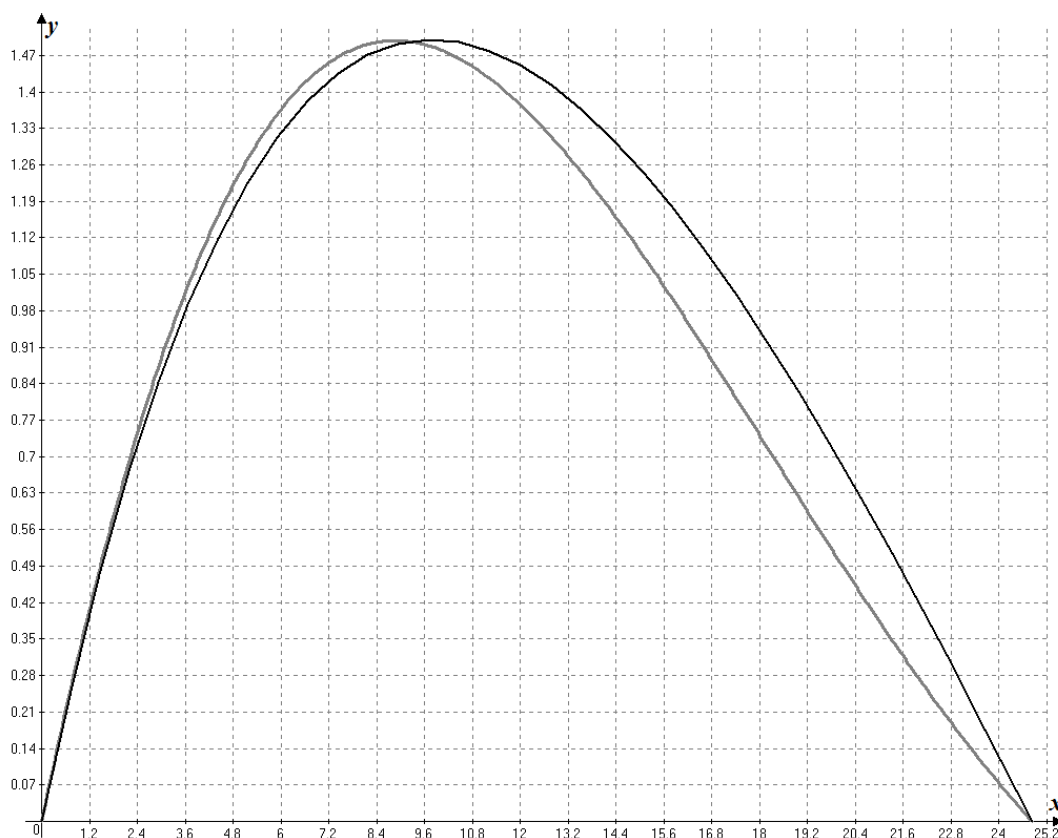


Рис. 8. Расчетная траектория АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345:
черная линия – расчет методом квадратичного приближения;
сплошная серая линия – расчет, полученный в [1] (гармоническое приближение)

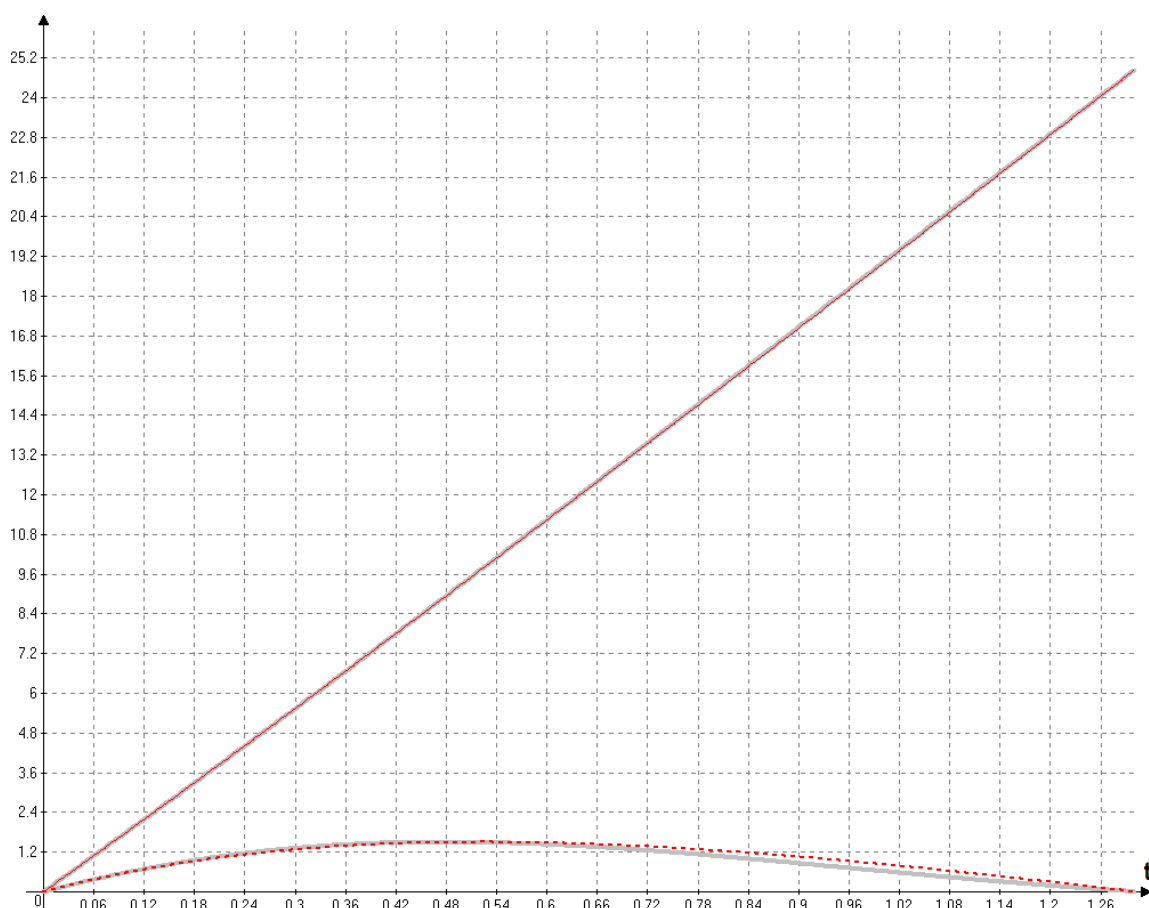


Рис. 9. Расчетные отклонения вдоль осей x (сплошная красная линия) и y (пунктирная красная линия), м, для АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345 методом квадратичного приближения. Сплошные серые линии обозначают соответствующие расчетные перемещения, полученные в [1] (гармоническое приближение)

Однако максимальный динамический прогиб вдоль оси y составляет 0,9 м и не соответствует требуемому. То есть установленное невыполнение необходимого условия играет существенную роль при выборе пути моделирования.

Таким образом, переходим к решению системы алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1,3 & 1,3\tau^2 \\ t^* & t^{*2} & t^{*3} \\ 1 & 2t^* & 3t^{*2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $a_1 = v_0 \sin \alpha$, решаем данную систему для определения a_1 и находим время достижения максимального прогиба t^* :

$$\begin{cases} a_1 = 1,5 \frac{21,3^2 - 3t^* \cdot 1,3}{\Delta}; \\ \Delta = t^{*3} - 3t^{*2} \cdot 1,3 + 2t^* \cdot 1,3^2 + t^* \cdot 1,3 - 1,3^2; \end{cases} \Rightarrow t^* = 0,779, \text{ с.}$$

Получаем подтверждение, что действительно нарушается соотношение $t^* = \frac{\tau}{3}$.

Также замечаем, что определитель системы линейных алгебраических уравнений является близким к нулю, что может повлиять на точность моделирования: $\Delta = 0,037$.

Тем не менее, продолжаем расчет и получаем необходимые коэффициенты $a_2 = -8,687$; $a_3 = 2,756$.

Полученные траектория и перемещения АТС (рис. 10, 11):

$$\begin{cases} x(t) = -0,99525e^{-0,619t} (t - 8,687t^2 + 2,756t^3) + 19,1t; \\ y(t) = 6,635e^{-0,619t} (t - 8,687t^2 + 2,756t^3). \end{cases}$$

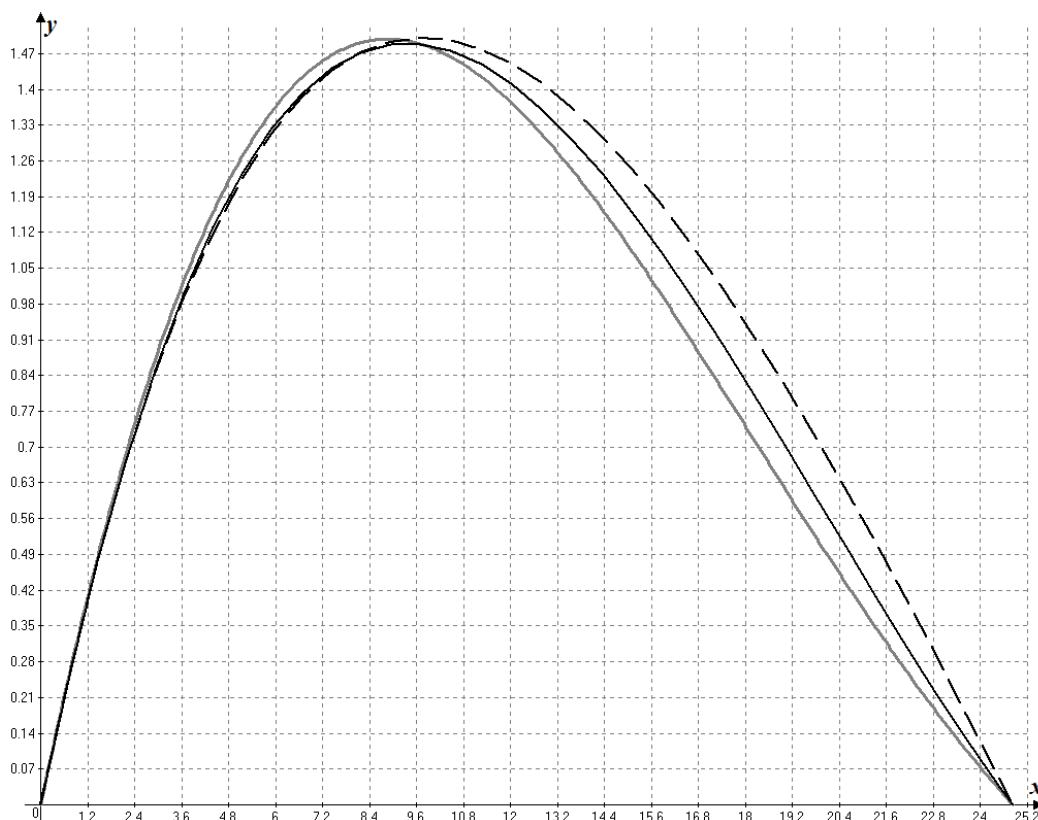


Рис. 10. Расчетная траектория АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345:
черная линия – расчет методом кубического приближения;
черная пунктирная линия – расчет методом квадратичного приближения;
сплошная серая линия – расчет, полученный в [1] (гармоническое приближение)

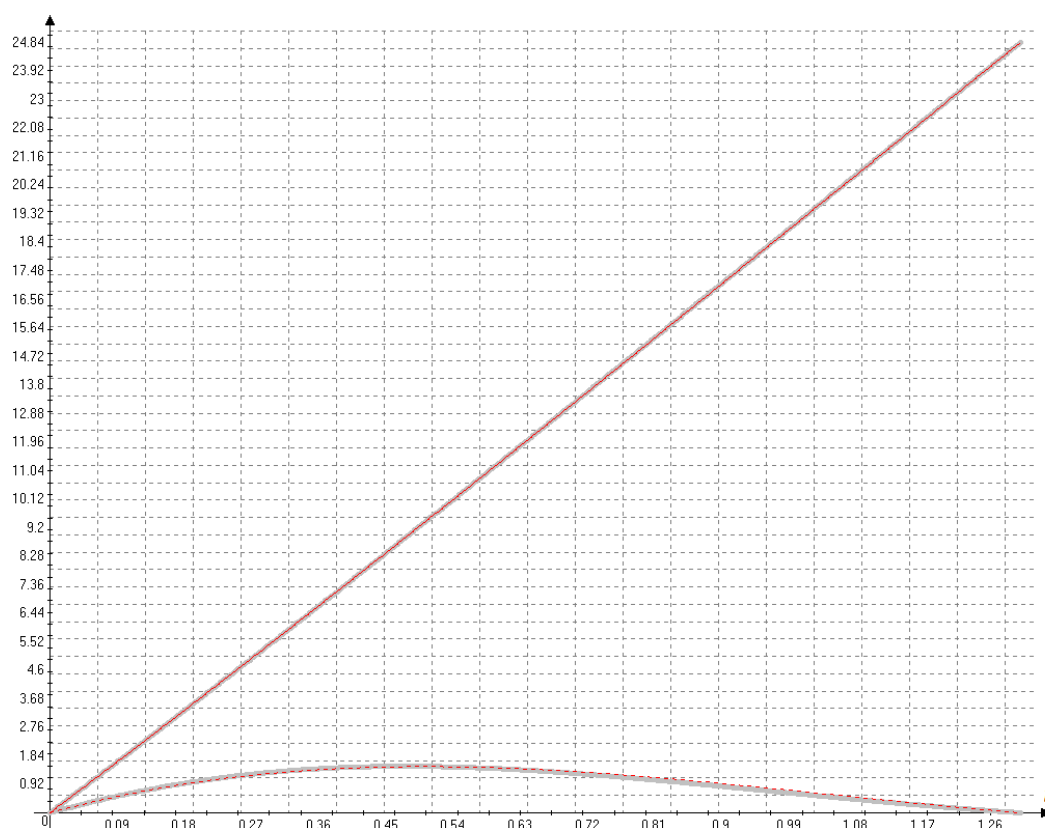


Рис. 11. Расчетные отклонения вдоль осей x (сплошная красная линия) и y (пунктирная красная линия), м, для АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345 методом кубического приближения. Сплошные серые линии обозначают соответствующие расчетные перемещения, полученные в [1] (гармоническое приближение)

Ниже приведены расчетные данные по скоростям (рис. 12) и ускорениям (рис. 13) с использованием полиноминых приближений в сравнении с расчетами, полученными в [1] (гармоническое приближение) для АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345.

Заключение

В результате разработаны алгоритмы полиноминого приближения траектории и перемещений АТС по данным натурных испытаний. Описанные методы дают хорошую сходимость друг с другом и с методом гармонического приближения, описанным в [1].

Аналитическое построение траекторий позволяет провести как проверку корректности разрабатываемой модели МКЭ тросовых ограждений, так и могут быть использованы при исследовании движения автомобильного транспортного средства непосредственно при построении МКЭ [5–10].

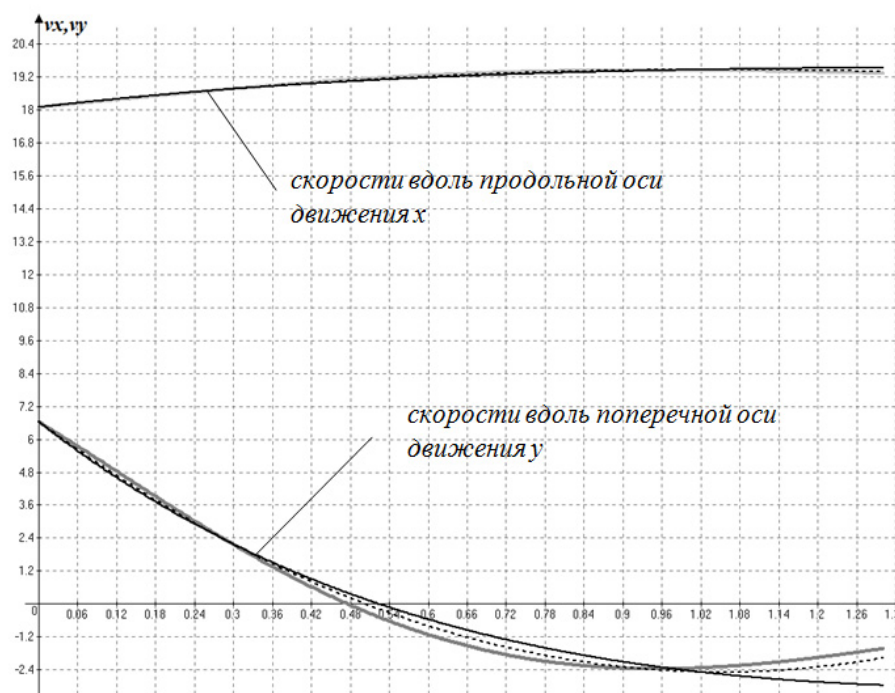


Рис. 12. Расчетные скорости АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345:
черная пунктирная линия – кубическое приближение;
сплошная черная линия – квадратичное приближение;
сплошная серая линия – гармоническое приближение, полученное в [1]

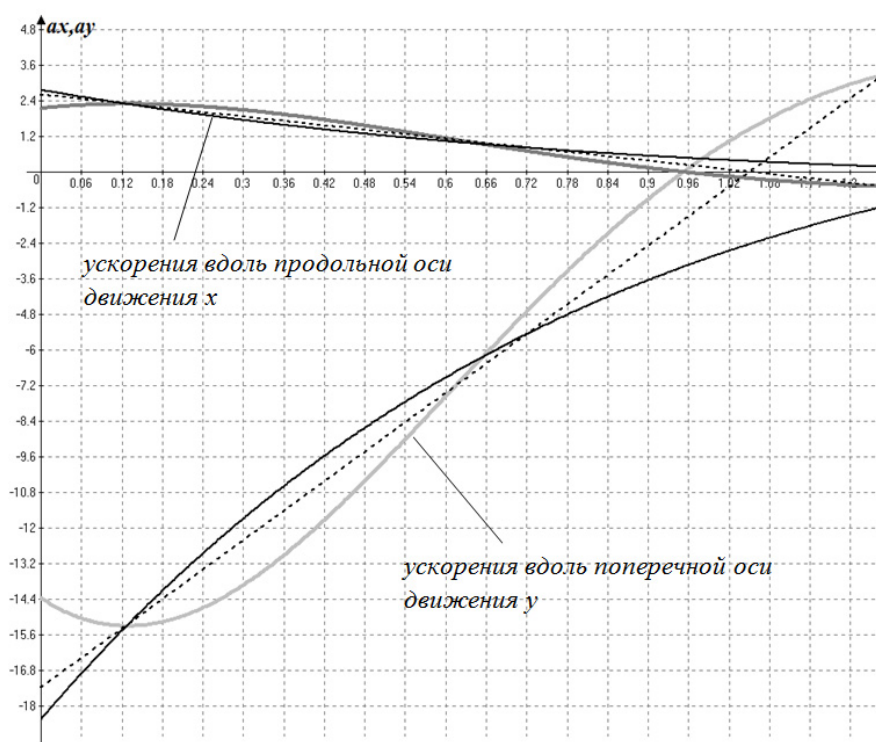


Рис. 13. Расчетные ускорения АТС типа автобус Мерседес-Бенц-0345:
черная пунктирная линия – кубическое приближение;
сплошная черная линия – квадратичное приближение;
сплошная серая линия – гармоническое приближение, полученное в [1]

Список литературы

1. Колесникова, Г.П. Приближенное математическое моделирование траектории движения АТС при косом наезде на боковые тросовые ограждения / Г.П. Колесникова, А.Р. Гасайниев // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. – 2018. – № 1 (15). – С. 2.
2. Курс теоретической механики: учебник для вузов / В.И. Дронг, В.В. Дубинин, М.М. Ильин [и др.]; под ред. К.С. Колесникова, В.В. Дубинина. – 5-е изд., испр. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2017. – 580 с.
3. ГОСТ Р 52721-2007 (п. 6.1–6.6). – URL: <http://www.rags.ru/gosts/gost/428/>
4. Результаты натурных испытаний ФГУП «НАМИ», 2016. – URL: <http://autorc.ru/activities/otdelenie-bezopasnosti-avtomobilej/laboratoriya-passivnoj-bezopasnosti.html>
5. Безопасный трос. На трассе М 7 испытывают новое ограждение, МК – Нижний Новгород (22 окт. 2013 г.). – URL: <http://www.avtodorogi-magazine.ru/item/514-ustrojstvo-trosovykh-ograzhdenij.html>
6. Гусева, У.Ю. Тросовые ограждения на автомобильных дорогах / У.Ю. Гусева, А.В. Тур, М.О. Моисеенко // Сб. науч. тр. XI Междунар. конф. студентов и молодых ученых, Россия, Томск, 22–25 апр. 2014 г. – Томск, 2014.
7. Карпов, И.А. Разработка конечно-элементных моделей тросовых дорожных ограждений с использованием программного комплекса ls-dyna / И.А. Карпов // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. – 2014. – № 2 (2). – С. 38.
8. Демьянушко, И.В. Моделирование работы тросовых дорожных удерживающих ограждений / И.В. Демьянушко, И.А. Карпов // Строительная механика и вопросы надежности на транспорте (с международным молодежным участием): тез. докл. 72-й науч.-метод. и науч.-техн. конф. МАДИ. – М., 2014.
9. Демьянушко, И.В. Разработка симуляционных моделей наезда транспортного средства на тросовые дорожные ограждения безопасности /

И.В. Демьянушко, И.А. Карпов, А.Г. Общев // Стендовые доклады Российской конференции пользователей программных комплексов MSC.Software 2012. – URL: http://www.mssoftware.ru/conf/conf_ru2012_2

10. Основы конструкции современного автомобиля: учебник для вузов / А.М. Иванов, А.Н. Солнцев, В.В. Гаевский [и др.]. – М.: ООО «Изд-во «За рулем», 2012. – 336 с.

References

1. Kolesnikova G.P., Gasaniev A.R. *Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura*, 2018, no. 1 (15), p. 2.

2. Drong V.I., Dubinin V.V., Il'in M.M., Kolesnikov K.S., Kosmodem'yanskij V.A., Nazarenko B.P., Pankratov A.A., Rusanov P.G., Saratov Yu.S., Stepanchuk Yu.M., Tusheva G.M., Shkapov P.M. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* (Course of Theoretical Mechanics), Moscow, MGTU them N.E. Bauman, 2017, 580 p.

3. URL: <http://www.rags.ru/gosts/gost/428/>

4. URL: <http://autorc.ru/activities/otdelenie-bezopasnosti-avtomobilej/laboratoriya-passivnoj-bezopasnosti.html>

5. URL: <http://www.avtodorogi-magazine.ru/item/514-ustrojstvo-trosovykh-ograzhdenij.html>

6. Guseva U.Yu., Tur A.V., Moiseenko M.O. XI Mezhdunarodnaya konferenciya studentov i molodyh uchenykh, Tomsk, 2014.

7. Karpov I.A. *Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura*, 2014, no. 2 (2), p. 38.

8. Demyanushko I.V., Karpov I.A. *Stroitel'naya mekhanika i voprosy nadezhnosti na transporte*, Tezisy dokladov, Moscow, 2014.

9. URL: http://www.mssoftware.ru/conf/conf_ru2012_2

10. Ivanov A.M., Solntsev A.N., Gaevsky V.V., Klyukin P.N., Osipov V.I., Popov A.I. *Osnovy konstrukcii sovremennogo avtomobilya* (The fundamentals of modern car design), Moscow, Za rulem, 2012, 336 p.