

УДК 551.321.1

Сладкова Любовь Александровна, д-р техн. наук, проф.,
ВА РВСН им. Петра Великого, Россия, 143911, Балашиха, ул. Карбышева, 8,
rich.cat2012@yandex.ru

Кузнецов Андрей Владимирович, аспирант,
РУТ (МИИТ), Россия, 125969, Москва, ул. Новосущевская, 22, rich.cat2012@yandex.ru

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОЦЕССОВ РАЗРУШЕНИЯ ЛЬДА

Аннотация. В настоящее время лед, как объект разрушения, рассматривается как монокристалл, на гранях которого возникают главные напряжения. На наш взгляд, примеси, содержащиеся во льду в виде пузырьков воздуха, соли, пыли, органических веществ и т.д., делают структуру льда неоднородной как на поверхности, так и внутри самих кристаллов. В результате этого механические характеристики льда неодинаковы даже на соседних участках одного ледяного массива. С другой стороны, лед, по мнению авторов, занимающихся его исследованиями, представляет собой вязкоупругое твердое тело, которое при разрушении воспринимает продольное сдвиговое сжатие. Учитывая, что разрушение льда будет производиться под воздействием удара, считаем, что его разрушение будет происходить при усилиях, лишь незначительно превышающих предел упругости.

При создании модели авторы считали, что для поликристаллического льда упорядоченного типа возможны четыре системы упругих параметров – E – модуль Юнга и μ – коэффициент Пуассона в зависимости от направления приложенного усилия: вдоль и поперек кристаллов относительно c -осей.

В статье рассмотрены две модели разрушения льда – математическая и регрессионная, которые показали высокую сходимость по показателям регрессии.

В первом случае модель льда представляет собой бесконечную пластину малой толщины, опирающуюся на упругие связи чередующейся жесткости, которые расположены на жестком основании. Для разрушения льда ударом действующее усилие разрушения направлено вдоль плоскостей скольжения.

Во втором случае для подтверждения полученной теоретически модели разрушения льда был проведен численный эксперимент, в котором учитывались основные механические характеристики льда, геометрические параметры выбранной модели льда и факторы, оказывающие влияние на прочность льда: величина внешнего воздействия, толщина кристалла льда, толщина спайки, модуль Юнга, высота слоя льда.

Анализ сходимости результатов исследований на основе полученных моделей подтвердил гипотезу разрушения льда как вязкоупругого твердого тела, которое при разрушении воспринимает продольное сдвиговое сжатие.

Ключевые слова: лед, модель, разрушение, упруговязкое тело, механические характеристики льда, параметры модели, численный эксперимент.

Sladkova Lyubov A., Dr. Sc., professor,
VA RVSN Peter the great, 8, str. Karbysheva, Moscow, 143911, Russia, rich.cat2012@yandex.ru
Kuznetsov Andrey V., graduate student,
RUT (MIIT), 22, str. Novosushchevskaya, Moscow, 125969, Russia, rich.cat2012@yandex.ru

MODELING OF PROCESSES OF BREAKING THE ICE

Abstract. Currently, the ice as object destruction is seen as the single crystal, which occur on the edges of the main voltage. In our view, the impurities contained in the ice in the form of air bubbles, salts, dust, organic substances, etc., do ice structure ragged both on the surface and inside the crystals themselves. As a result, the mechanical properties of ice vary even on adjoining sections of one ice array. On the other hand, ice, according to the authors, ice research, is a viscose-elastic solid, which, when destruction perceives longitudinal, shear compression. Considering that the destruction of the ice will be produced under the impact of the strike, believe that its destruction would occur when efforts only slightly in excess of the limit of elasticity.

When you create a model believe that for polycrystalline ice orderly type there are four possible systems of elastic parameters E – young's modulus and Poisson's ratio μ – depending on the direction of the applied effort: the length and breadth of the crystals is relatively c -axis.

The article discusses two models for breaking the ice: Math and a regression, which showed high convergence on indicators of regression.

In the first case, the ice model represents an infinite plate small thickness based on elastic connection alternating rigidity, which are located on the hard ground. For breaking the ice punch, effective force of destruction directed along the slip planes.

In the second case to confirm the received model theoretically breaking the ice numerical experiment was carried out, which takes into account the basic mechanical properties of ice, geometrical parameters of the chosen model of ice and factors that influence on the strength of ice: the amount of external influence, the thickness, the thickness of the ice crystal spikes, young's modulus, the height of the ice layer.

Analysis of convergence of research results on the basis of the obtained models confirmed the hypothesis of breaking the ice as viscose-elastic solid body that perceives longitudinal fracture, shear compression.

Key words: ice, model, destruction, viscose-elastic body mechanical properties of ice, the parameters of the model, the numerical experiment.

Введение

Анализ исследований, проведенный по материалам научно-технической литературы, показал, что лед как объект разрушения рассматривается как монокристалл, имеющий концентраторы напряжений,

т.е. на наш взгляд, на гранях кристалла возникают главные напряжения. Однако частицы льда представляют собой монолит, содержащий пузырьки воздуха, соли, пыль, органические вещества и т.д., которые находятся как на поверхностях, ограничивающих кристаллы, так и внутри самих кристаллов. В результате этого механические характеристики льда неодинаковы даже на соседних участках одного ледяного массива.

Основная часть

С точки зрения науки о деформации и текучести материалов, лед рассматривается как вязкоупругое твердое тело, которое может воспринимать различные виды нагружений: продольное сдвиговое и чистое всестороннее сжатие [1].

В идеале во льду, как анизотропном теле, возникают только два вида упругой деформации, характеризующиеся модулями упругости и сдвига, что присуще анизотропным веществам

$$n = \frac{E}{2(1 + \mu)}, \quad k = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}. \quad (1)$$

Данное допущение справедливо в случае кратковременных воздействий (удар) на лед и незначительных деформаций перед разрушением. При этом протяженность упругой зоны для льда очень велика, в то время как зона пластичности мала, что подтверждается высоким коэффициентом отскока (0,95) льда при ударе. Из сказанного вытекает, что для разрушения льда необходимо приложить усилие, лишь незначительно превышающее предел упругости.

При моделировании льда и его прочностных характеристик необходимо рассмотреть влияние кристаллической решетки на его упругие свойства. На основании допущений, сделанных выше, за основную форму кристалла льда примем симметричную гексагональную решетку [2].

Предположим, что для поликристаллического льда упорядоченного типа

возможны четыре системы упругих параметров – E – модуль Юнга и μ – коэффициент Пуассона в зависимости от направления приложенного усилия:

- 1) параллельно вертикально расположенным c -осям и направлению намораживания;
- 2) перпендикулярно вертикально расположенным c -осям и направлению намораживания;
- 3) параллельно направлению намораживания и перпендикулярно хаотически ориентированным в горизонтальной плоскости c -осям;
- 4) перпендикулярно направлению намораживания и параллельно горизонтальной плоскости.

Очевидно, что предел прочности поликристаллического льда для каждого из указанных случаев может быть различным.

В предлагаемой нами модели поликристаллического льда, опираясь на выводы, сделанные в [3, 4] Нортвудом, Бойлом и Спрулом, считаем, что все его кристаллы ориентированы вертикально и «спаяны» между собой (по аналогии со сварным швом).

В качестве основного элемента льда выберем единичный монокристалл, который содержит расположенные тетраэдрически на расстоянии $2,76\text{\AA}$ атомы кислорода, порождая гексагональную симметрию относительно c -оси. Причем, используя строение кристалла льда, считаем, что единичная ячейка кристаллической структуры содержит четыре молекулы. Ее размеры (около $4,5 \times 4,5 \times 7,4 \text{\AA}$) соответствуют плотности льда $0,917 \text{ г/см}^3$ при 0°C , откуда вытекает важное свойство положительной плавучести льда в воде.

Причем, механические характеристики спаек могут отличаться от механических характеристик самих кристаллов. Равенство характеристик позволит получить монокристаллический лед.

Исходя из предполагаемой кристаллической модели льда видно, что базисная плоскость модели является плоскостью скольжения решетки. Потому касательное напряжение, приложенное параллельно этой плоскости, вызывает скорость деформации, которая будет выше, чем в том случае, когда касательное напряжение будет приложено по нормали к плоскости скольжения. В самой же плоскости скольжения нет каких-либо предпочтительных направлений.

Таким образом, предлагаемая модель льда как поликристалла, показанная на рис. 1, представляет собой бесконечную пластину малой толщины, опирающуюся на упругие связи чередующейся жесткости, которые расположены на жестком основании.

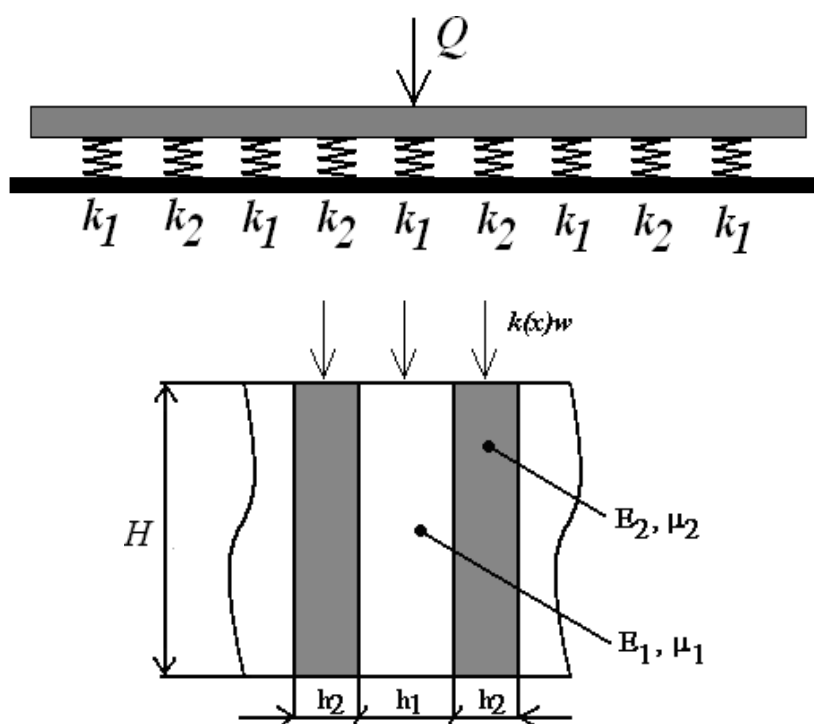


Рис. 1. Модель поликристаллического льда

Для разрушения льда ударом направим действующее усилие разрушения Q вдоль плоскости скольжения. Тогда со стороны упругого основания на кристаллы и спайки переменной жесткости k_1 и k_2 будут действовать реакции связей, которые будут изменяться в зависимости от точки приложения внешнего усилия. Величины ширины кристаллов

льда h_1 и спайки h_2 можно принять равными $4,5 \dots 7,4 \text{ А}^\circ$.

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона равны: для кристалла льда – E_1 и μ_1 , а для спайки – E_2 и μ_2 .

При действии разрушающего усилия вдоль плоскости скольжения видно, что рассматриваемая модель работает на изгиб. Учитывая, что модель является пластиной, реакцию со стороны основания можно представить в виде усилия, которое можно определить как произведение функции переменной жесткости на перемещение каждого кристалла и спайки соответственно, т.е. в виде некоторой функции $F = k(x)w$.

Другими словами, каждый кристалл и спайка воспринимают независимую друг от друга нагрузку, представляя таким образом систему независимых упругих стержней, каждый из которых работает на сжатие.

Жесткость каждого i -го кристалла льда и спайки, как стержня, работающего на сжатие, исходя из основных положений сопротивления материалов, можно представить в виде

$$c = \frac{EA}{H},$$

где E – модуль Юнга стержня; A – площадь поперечного сечения кристалла льда или спайки; H – длина стержня (толщина прослойки).

Имея размеры кристалла и спайки, определим ориентировочную жесткость элемента модели.

$$C = 9,29 \cdot 10^9 \cdot 4,5 \text{ А}^\circ \cdot 4,5 \text{ А}^\circ / 7,4 \text{ А} = 25,42 \cdot 10^{-1} \text{ Н/м} = 2,45 \text{ Н/м} (1 \text{ А}^\circ = 10^{-10} \text{ м}).$$

Для решения задачи разобьем пластину на балки единичной ширины, для каждой из которых уравнение изгиба будет иметь вид (2).

Горизонтальную составляющую силы примем равной нулю.

$$\frac{d^2}{dx^2} \left[EI \cdot \frac{d^2 w}{dx^2} \right] + k(x)w = q(x), \quad (2)$$

где w – прогиб единичной балки; x – изменение координаты жесткости единичного стержня вдоль балки; $I = bH_1^3/12$ – момент инерции;

H_1 – высота пластины; $k(x)$ – жесткость кристалла льда или спайки;
 $q(x)$ – приложенная вертикальная нагрузка на единицу длины балки;
 H – толщина слоя льда (рис. 2).

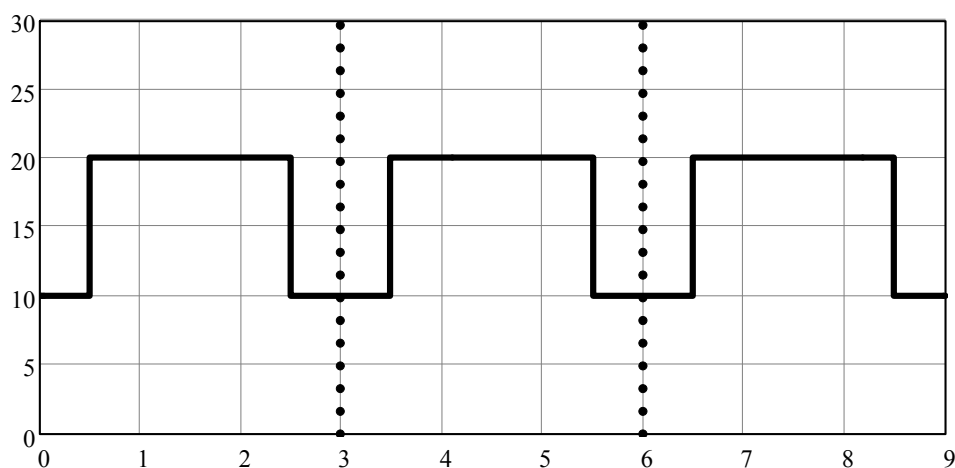


Рис. 2. Вид функции изгибной жесткости

Представим функцию жесткости в виде (рис. 2).

Например, при $h_1 = 1$, $h_2 = 2$, $E_1 = 10$, $E_2 = 20$, $H = 1$

$$k(x) = (C \times \text{sign}(\cos(Ax) + B) + D)/H. \quad (3)$$

Здесь A – период функции, равный:

$$A = \frac{2\pi}{h_1 + h_2}, \quad (4)$$

где B – смещение значений функции косинуса для получения нужных отрезков по оси x ; C – половина разницы между значениями модулей Юнга; D – среднее арифметическое модулей Юнга.

Переходя к задаче Коши, преобразуем уравнение (2) к виду:

$$\frac{dw_3}{dx} = q(x) - k(x)bw. \quad (5)$$

Задаваясь граничными условиями (угол поворота равен нулю ввиду симметрии задачи ($w' = 0$); внутренняя сила равна приложенной сосредоточенной ($w''' = P$)) и используя метод ортогонализации Годунова [37], получим полное решение уравнения (5), графическая интерпретация которого

представлена на рис. 3. Анализ решения позволил установить, что с ростом толщины слоя льда величина прогиба снижается, что не противоречит здравому смыслу. Величина деформации будет увеличиваться с ростом толщины H спайки в результате снижения его жесткости. Аналогичная картина наблюдается при увеличении внешней нагрузки.

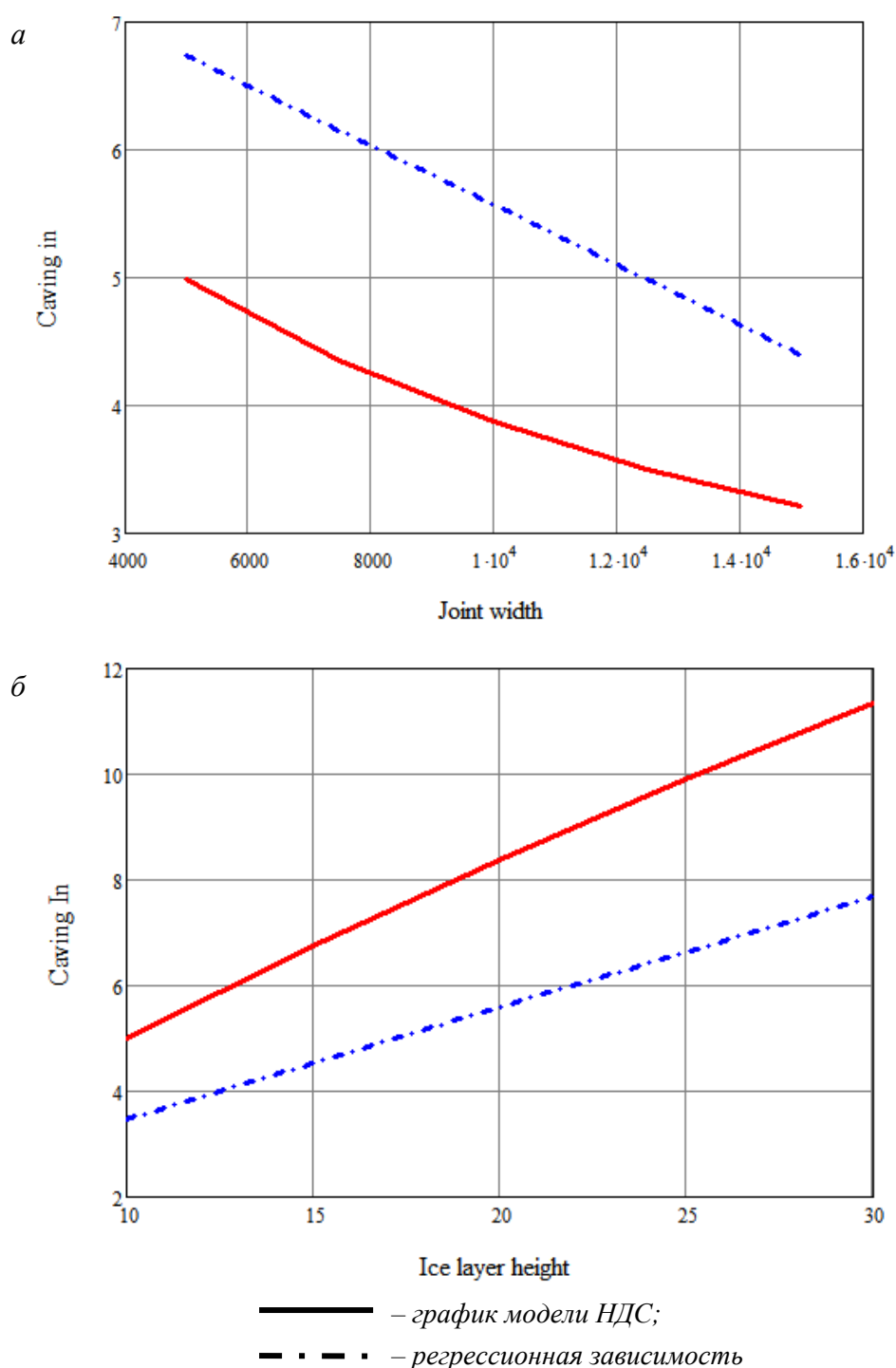


Рис. 3. График изменения прогиба от толщины льда: а – спайки; б – слоя

Для подтверждения проведенных выше теоретических исследований необходимо проведение численного эксперимента. Учитывая основные механические характеристики льда и геометрические параметры выбранной модели льда, принимаем, что в соответствии с выбранной моделью факторами, оказывающими влияние на прочность льда, являются величина внешнего воздействия, толщина кристалла льда, толщина спайки, модуль Юнга, высота слоя льда. Исследуемые факторы с введенными обозначениями приведены в табл. 1.

Предлагаемая имитационная модель является шестифакторной (табл. 1), в которой исследуемые параметры могут изменяться в пределах, указанных в табл. 2.

Таблица 1

Факторы, действующие на напряженно-деформированное состояние льда

№ п/п	Фактор	Обозначение	
		Реальное	Условное
1	Внешнее воздействие, Н	Q	X_1
2	Толщина кристалла льда, мм	h_1	X_2
3	Толщина спайки, мм	h_2	X_3
4	Модуль Юнга кристалла льда, МПа	c_1	X_4
5	Модуль Юнга спайки, МПа	c_2	X_5
6	Высота слоя льда, мм	H	X_6

Таблица 2

Пределы изменения факторов, действующих
на напряженно-деформированное состояние льда

№ п/п	Фактор	Значение	
		min	max
1	Внешнее воздействие, Н (X_1)	10000	20000
2	Толщина кристалла льда, мм (X_2)	0,4	0,6
3	Толщина спайки, мм (X_3)	0,3	0,8
4	Модуль Юнга кристалла льда, МПа (X_4)	8500	9500
5	Модуль Юнга спайки, МПа (X_5)	5000	15000
6	Высота слоя льда, мм (X_6)	10	30

Число проведенных исследований в соответствии с планом проведения эксперимента определяем по зависимости $N = 2^p = 2^6 = 64$ опыта.

Учитывая многовариантность исследований, была составлена программа для оценки параметров имитационной модели НДС льда на языке программирования C++ по алгоритму.

Используя теорию планирования эксперимента, получим регрессионную зависимость (6). Значимость коэффициентов оценивалась по критерию Стьюдента, а адекватность – по критерию Фишера.

$$w = 5,564 + 1,878X_1 - 1,084X_5 + 2,193X_6. \quad (6)$$

Анализ регрессионной зависимости (6) показал, что максимальная величина прогиба располагается под точкой приложения силы, действующей на разработанную модель льда. Регрессионная зависимость прогиба, полученная по результатам численного эксперимента, свидетельствует о том, что из рассматриваемых факторов значимыми оказались величина внешнего воздействия (X_1), модуль Юнга спайки (X_5) и толщина слоя льда (X_6).

Таким образом, очевидно, что толщина кристалла льда, толщина спайки и модуль Юнга кристалла льда не оказывают существенного влияния на напряженно-деформированное состояние льда. Принимая две величины из рассматриваемых в регрессионной зависимости, равными нулю, получаем изменение исследуемых параметров на плоскости. Сравним полученные зависимости с теоретическими зависимостями (на рис. 3 это изменение отмечено штрихпунктирной линией).

Из графической интерпретации проведенных исследований видно, что результаты расчетной модели, проведенной по методу Годунова, имеют высокую степень корреляционной зависимости с регрессионной зависимостью.

Проведем исследование регрессионной зависимости (6) в трехмерном пространстве, принимая один из рассмотренных факторов, равным нулю. Результаты исследований показывают, что изменение прогиба представляет собой плоскость, ограниченную координатными осями, которые позволяют оценить, например, внешнее усилие от толщины слоя льда. В этом случае параметр X_5 мы можем считать параметром второго порядка малости. Тогда величина искомого прогиба будет иметь вид:

$$w = 5,564 + 1,878X_1 + 2,193X_6. \quad (7)$$

Из условия жесткости известно, что для обеспечения разрушающего усилия необходимо, чтобы соблюдалось превышение расчетной величины прогиба w допускаемой $[w]$, т.е. соблюдалось неравенство

$$w \geq [w]. \quad (8)$$

Очевидно, что исследуемая зависимость (7) будет представлять собой плоскость.

Исследуем эту зависимость, используя неравенство (8).

Очевидно, что величина внешнего воздействия будет равна

$$X_1 = ([w] - 5,564 - 2,193X_6)/1,878 \geq 0.$$

Для выполнения полученного неравенства следует, что допускаемая величина прогиба льда для условия разрушения должна выбираться из соотношения

$$[w] \geq 5,564 + 2,193X_6.$$

Таким образом, установлено, что деформация, предшествующая разрушению льда, должна быть не менее 70% от размеров (толщины) льда.

Заключение

Лед рассматривается как вязкоупругое твердое тело, которое может воспринимать различные виды нагружений: продольное сдвиговое и чистое всестороннее сжатие, т.е. его напряженно-деформированное

состояние можно оценить, пользуясь обычными законами сопротивления материалов. С ростом толщины слоя льда величина прогиба снижается, что не противоречит здравому смыслу. Величина деформации будет увеличиваться с ростом толщины H спайки в результате снижения его жесткости. Полученная модель позволила выявить значимые факторы: величину внешнего воздействия (X_1), модуль Юнга спайки (X_5) и толщину слоя льда (X_6). Установлено, что результаты модели имеют высокую степень корреляционной зависимости с регрессионной зависимостью.

Анализ сходимости результатов исследований на основе полученных моделей подтвердил гипотезу разрушения льда как вязкоупругого твердого тела, которое при разрушении воспринимает продольное сдвиговое сжатие.

Список литературы

1. Паундер, Э. Физика льда / Э. Паундер. – М.: Мир, 1967. – 188 с.
2. Shulson, E.M. The Structure and Mechanical Behavior of Ice / E.M. Shulson // JOM: Journal of the minerals, metals and materials society. – 1999. – N 51. – P. 21–27.
3. Northwood, T.D. // Canad. J. Phys. – 1947. – V. 88, N A25.
4. Boyle, R.W. Velocity of Longitudinal Vibration in Solid Rods (Ultrasonic Method) With Special Reference to the Elasticity of Ice, Canada / R.W. Boyle, D.C. Sproule // Canad. J. Res. – 1931. – V. 601, N 5.
5. Арушанян, О.Б. Решение линейной краевой задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений методом ортогональной прогонки С.К. Годунова / О.Б. Арушанян, С.Ф. Залеткин // Вычислительные методы и программирование. – 2001. – Т. 2. – С. 41–48.

References

1. Paunder Eh. *Fizika l'da* (Ice physics), Moscow, Mir, 1967, 188 p.
2. Shulson E.M. The Structure and Mechanical Behavior of Ice, JOM: Journal of the minerals, metals and materials society, 1999, no. 51, pp. 21–27.
3. Northwood T.D. Canad. J. Phys, 1947, vol. 88, no. A25.
4. Boyle R.W., Sproule D.C. Velocity of Longitudinal Vibration in Solid Rods (Ultrasonic Method) With Special Reference to the Elasticity of Ice, Canada, Canad. J. Res, 1931, vol. 601, no. 5.
5. Arushanyan O.B., Zaletkin S.F. *Vychislitel'nye metody i programmirovaniye*, 2001, vol. 2, pp. 41–48.