

УДК 624.074.433.042.12

Мануйлов Гайк Александрович, канд. техн. наук, доц.,
РУТ (МИИТ), Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, noxonius@mail.ru

Косицын Сергей Борисович, д-р техн. наук, проф.,
РУТ (МИИТ), Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, kositsyn-s@yandex.ru

Бегичев Максим Михайлович, канд. техн. наук, доц.,
РУТ (МИИТ), Россия, 127994, Москва, ул. Образцова, д. 9, стр. 9, noxonius@mail.ru

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ И КОНКУРЕНЦИИ СОБСТВЕННЫХ ФОРМ В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРОДОЛЬНО СЖАТОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Аннотация. В работе рассмотрены особенности классического решения для критических напряжений в задаче устойчивости круговой продольно сжатой цилиндрической оболочки. Это напряжение состоит из двух слагаемых, отражающих способность оболочки сопротивляться выпучиванию за счет изгибных и мембранных деформаций. При ненулевом коэффициенте Пуассона развивается осесимметричный краевой эффект, который уменьшает критическую нагрузку и приводит к изменению начального расположения собственных форм по мере роста нагрузки (конкуренция собственных форм). Установлено, что в условиях краевого эффекта оболочка всегда теряет устойчивость по только неосесимметричным формам. Показано, что если краевой эффект не развивается, то порядок собственных форм потери устойчивости при нулевой нагрузке и при нагрузке близкой к критической идентичен, то есть явление конкуренции собственных форм не возникает.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, устойчивость, краевой эффект, напряжение.

Manuylov Gaik A., Ph. D., associate professor,
RUT (MIIT), 9, building 9, Obraztsov street, Moscow, 127994, Russia, noxonius@mail.ru

Kosytsyn Sergey B., Dr. Sc., professor,
RUT (MIIT), 9, building 9, Obraztsov street, Moscow, 127994, Russia, kositsyn-s@yandex.ru

Begichev Maxim M., Ph. D., associate professor,
RUT (MIIT), 9, building 9, Obraztsov street, Moscow, 127994, Russia, noxonius@mail.ru

ON THE CLASSIC SOLUTION AND COMPETITION OF EIGENMODES IN THE PROBLEM OF THE STABILITY OF A LONGITUDINELY COMPRESSED CYLINDRICAL SHELL

Abstract. The paper deals with the features of the classic solution for critical stresses in the stability problem of a longitudinally compressed circular cylindrical shell. This stress consists of two terms, reflecting the ability of the shell to resist buckling due to bending

and membrane deformations. With a non-zero Poisson's ratio, an axisymmetric edge effect develops, which reduces the critical load and leads to a change in the initial order of the eigen modes as the load increases (competition of eigen modes). It is established that shell with the edge effect always loses its stability only in non-axisymmetric forms. It is shown that if the edge effect does not develop, then the order of eigen forms at zero load and at a load close to critical is identical, that is, the phenomenon of competition of eigen formes does not arise.

Key words: cylindrical shell, stability, edge effect, stress.

1. О классической критической нагрузке

Бифуркационная задача устойчивости продольно сжатой круговой цилиндрической оболочки, как известно [1], описывается линейным дифференциальным уравнением в частных производных относительно прогиба $W(x, y)$ при нулевых граничных условиях

$$\frac{D}{\delta} \nabla \nabla \nabla \nabla W + \frac{E}{R^2} \frac{\partial^2 W}{\partial x^4} + \sigma \nabla \nabla \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Для случая шарнирного закрепления

$$W = \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = \sigma_x = V = 0 \text{ при } x = 0, l,$$

где W – прогиб, V – поперечное перемещение, ∇ – оператор Лапласа, D – цилиндрическая жесткость, σ – продольное сжимающее напряжение.

В качестве решения (неосесимметричная форма потери устойчивости) можно принять прогибы оболочки в виде:

$$W = A_{\min} \sin \frac{\pi m x}{l} \sin \frac{n y}{R}.$$

Здесь n и m – целые числа, определяющие число поперечных волн и продольных полуволн. Подстановка выражения для прогиба в виде произведения синусоид позволяет выразить критическое напряжение в следующем виде:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{E\delta}{R} \left[\frac{\delta l^2 R}{12(1-\nu^2)\pi^2 m^2} \left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2} \right) + \frac{\pi^2 m^2}{\delta l^2 R \left(\frac{\pi^2 m^2}{l^2} + \frac{n^2}{R^2} \right)^2} \right].$$

Если ввести безразмерные величины

$$\eta = n^2 \delta / R; \quad \xi = b/a = \pi R m / n l,$$

где a и b – размеры прямоугольных ячеек волнообразования вдоль образующей и направляющей цилиндра, и обозначить

$$\frac{\pi^2 m^2 R^4}{\delta l^2 R n^4} = \frac{\pi^2 m^2 R^2}{l^2 n^2} \cdot \frac{R}{\delta n^2} = \xi^2 / \eta,$$

то можно записать

$$\sigma_{кр} = \frac{E\delta}{R} \bar{\sigma}_{кр} = \frac{E\delta}{R} \left[\frac{(1 + \xi^2)\eta^2}{12(1 - \nu^2)\xi^2} + \frac{\xi^2}{(1 + \xi)^2 \eta} \right],$$

или

$$\sigma_{кр} = \frac{E\delta}{R} [\bar{\sigma}_и + \bar{\sigma}_м] = \frac{E\delta}{R} \bar{\sigma}_{кр}. \quad (1)$$

Здесь первое слагаемое в скобках определяет вклад энергии изгибных деформаций оболочки в общее сопротивление выпучиванию; второе слагаемое – вклад энергии поперечных мембранных деформаций. Выражение в квадратных скобках состоит из двух фактически взаимнообратных величин. Поэтому наименьшая величина критического напряжения достигается при взаимном равенстве этих слагаемых.

Тогда каждое из них равно половине минимальной критической нагрузки

$$\sigma_{кр}^{\min} \rightarrow \sigma_{кр}^и = \sigma_{кр}^м = \frac{1}{2} \sigma_{кр}^{\min}.$$

Окончательно получим выражение для классического критического напряжения

$$\sigma_{кр}^{\min} = \frac{E\delta}{R} \left(\frac{1}{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)} + \frac{1}{2\sqrt{3}(1 - \nu^2)} \right) = \frac{E\delta}{R\sqrt{3}(1 - \nu^2)}.$$

Количество окружных волн n зависит от соотношения сторон прямоугольных ячеек волнообразования $\xi = a/b$

$$n = \frac{\xi}{1 + \xi^2} \sqrt[4]{\frac{R^2}{\delta^2} 12(1 - \nu^2)}.$$

При $\xi = 1$ (квадратные ячейки) приходим к известной формуле

$$n \cong 0,909 \sqrt{\frac{R}{\delta}}.$$

Энергетическое обоснование формулы (1) покажем при выводе критического усилия ($P = \sigma_{кр} \delta$), как это сделал С.П. Тимошенко [2].

Он принял в качестве осесимметричной формы потери устойчивости синусоидальную форму прогибов $\left(W = A \sin \frac{\pi m x}{R} \right)$.

Условие наступления критического равновесия можно представить в виде равенства нулю второй вариации полной потенциальной энергии

$$\delta^2 \mathfrak{E} = I_{\sigma} + I_{и} + I_{м} = 0, \quad (2)$$

где I_{σ} – работа внешней нагрузки, $I_{и}$ и $I_{м}$ – потенциальная энергия изгибных и мембранных деформаций

$$I_{\sigma} = -2\pi R P \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 dx = -P A^2 \pi^3 m^2 R / 2l;$$

$$I_{и} = 2\pi R D \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 W}{dx^2} \right)^2 dx = A^2 D \pi^4 m^4 R / 2l^3;$$

$$I_{м} = \frac{2\pi R E \delta}{2(1-\nu^2)} \int_0^l \left[\left(\frac{du}{dx} - \frac{w}{R} \right)^2 + 2(1-\nu) \frac{w du}{R dx} \right] dx = A^2 \pi E \delta l / R.$$

Критическое усилие получим в виде двух составляющих в соответствии с представлением энергии упругой деформации как суммы энергии изгибной деформации и энергии мембранной деформации

$$P_{кр} = \frac{E \delta^3 2 m^2 \pi^2}{24(1-\nu^2) l^2} + \frac{E \delta l^2}{\pi^2 m^2 R^2} = \frac{E \delta^2}{R} \bar{P}_{кр}$$

или

$$P_{кр} = \frac{E \delta^2}{R} \left(\frac{\delta R \pi^2 m^2}{12(1-\nu^2) l^2} + \frac{l^2}{\delta R \pi^2 m^2} \right) = \frac{E \delta^2}{R} (\bar{P}_{и} + \bar{P}_{м}).$$

Как и в рассмотренном выше выводе формулы классического критического напряжения, минимум критического усилия соответствует равенству слагаемых в скобках

$$\min P_{\text{кр}} \Rightarrow \bar{P}_{\text{и}} = \bar{P}_{\text{м}} = \frac{1}{2} \bar{P}_{\text{кр.кл.}}$$

Если обозначить

$$1/\psi = \delta R \pi^2 m^2 / l^2; \quad \psi = \bar{P}_{\text{м}},$$

то

$$\bar{P}_{\text{м}} = \bar{P}_{\text{и}} = \frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} = \frac{1}{2} \bar{P}_{\text{кр.кл.}}$$

Окончательно получим

$$P_{\text{кр}} = \frac{E\delta^2}{R} \left(\frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} + \frac{1}{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} \right) = \frac{E\delta^2}{R\sqrt{3(1-\nu^2)}}.$$

Количество продольных полуволн m определяется так:

$$m = \sqrt{2\sqrt{3(1-\nu^2)}} l / \pi \sqrt{R\delta}.$$

Заметим, что разложение критического усилия на изгибную и равную ей мембранную составляющие справедливо, вообще говоря, только для рассмотренного выше классического решения линеаризованной задачи устойчивости. В случае развития краевого эффекта соотношение между $\bar{P}_{\text{и}}$ и $\bar{P}_{\text{м}}$ может измениться.

2. О влиянии нелинейного осесимметричного краевого эффекта

Влияние нелинейного краевого эффекта проявляется в следующих случаях:

1. Когда коэффициент Пуассона не равен нулю.
2. Когда закрепления по торцам оболочек стесняют радиальные перемещения.

Исследованиями влияния краевого эффекта при продольном сжатии цилиндрической оболочки занимались Геккелер [3], Фишер [4], Ш. Охира [5], Б. Алмрос [6], Н. Хофф и Л. Райфельд [7].
Особенно важными представляются результаты, полученные Б. Алмросом. Он представил общее решение для прогиба W и функции напряжений f в момент потери устойчивости в виде двух слагаемых

$$W = W_0 + W_1; \quad f = f_0 + f_1.$$

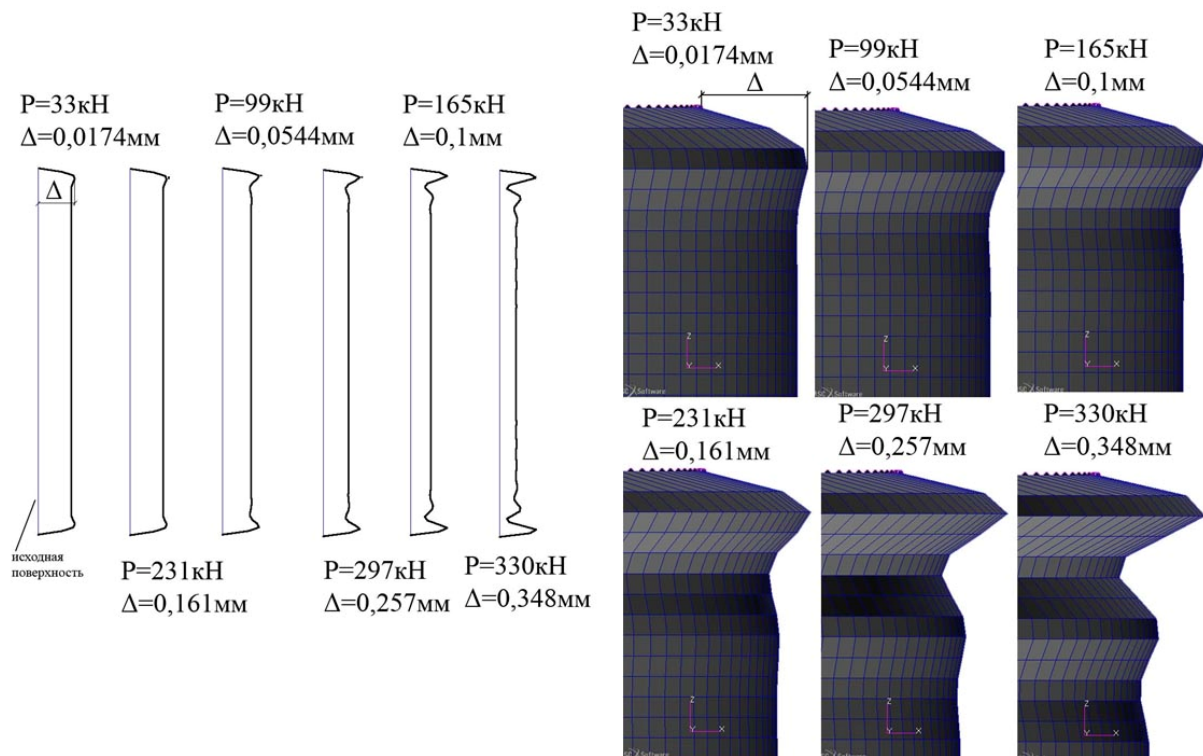


Рис. 1. Нелинейный осесимметричный краевой эффект, возникающий при осевом сжатии модельной оболочки ($R/\delta = 250$, $R = 250$ мм, $L/R = 4$, $E = 10^4$ кг/мм², $\nu = 0,3$)

Первые слагаемые есть решения дифференциального уравнения краевого эффекта [6].

$$Dw_0xxxx + Pw_0xx + E\delta w_0/R^2 - \frac{\nu P}{R} = 0.$$

Вторые слагаемые есть нулевые собственные формы ($W_1 = \xi W_{сф}^0$), которые находятся путем численного решения однородных уравнений

равновесия и совместности деформаций после подстановки в них решений для краевого эффекта W_0 и f_0

$$D\nabla^4 W_1 + f_{1,xx/R} + PW_{1,xx} - W_{0,xx}f_{1,yy} + \left(\nu P - \frac{E\delta W_0}{R} \right) W_{1,yy} = 0;$$

$$\frac{1}{E\delta} \nabla^4 f_1 - W_{1,xx/R} + W_{0,xx}W_{1,yy} = 0.$$

Здесь нижние индексы xx и yy после запятой означают дифференцирование по соответствующей координате.

При помощи представлений

$$f_1 = F(x) \sin \frac{ny}{R}; \quad W_1 = W(x) \sin \frac{ny}{R}.$$

Б. Алмрос перешел к системе обыкновенных уравнений с переменными коэффициентами относительно $F(x)$ и $W(x)$

$$D \left[W'''' - 2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 W'' + \left(\frac{n}{R} \right)^4 W \right] + \frac{F}{R} + PW'' +$$

$$+ \left(\frac{n}{R} \right)^2 W_0'' F - \left(\frac{n}{R} \right)^2 \left(\nu P - \frac{E\delta W_0}{R} \right) W = 0;$$

$$\frac{1}{E\delta} \left[F'''' - 2 \left(\frac{n}{R} \right)^2 F'' + \left(\frac{n}{R} \right)^4 F \right] - \frac{W''}{R} - \left(\frac{n}{R} \right)^2 W_0'' W = 0.$$

Используя метод конечных разностей, Б. Алмрос получил коэффициенты уменьшения для классической критической нагрузки для стандартных условий шарнирного опирания

$$S_1 (W|_{\Gamma} = W''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0), \quad \eta = \sigma_{кр}^{крэф} / \sigma_{кркл} \approx 0,8 - 0,87.$$

$$\text{При граничном условии } S_2 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = u|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0), \quad \eta \approx 0,84.$$

Для $S_3 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0)$ значение η существенно меньше ($\eta \approx 0,5 \div 0,51$).

Практически те же значения η ($0,5 \div 0,51$) были получены и для случая $S_4 (w|_{\Gamma} = w''|_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0)$.

Отметим, что в случае S_3 и S_4 снижение критической нагрузки такое же, как и без учета краевого эффекта. Эти два последних результата (S_3 и S_4) указывают на важную сдерживающую роль краевых окружных мембранных напряжений. При отсутствии этих напряжений критическая нагрузка практически уменьшается в два раза по сравнению с классической.

В случае стандартной заделки (условие $C_3(w|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy} = 0)$), как и при условии $C_1(w|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = u|_{\Gamma} = V|_{\Gamma} = 0)$ снижение нагрузки несколько меньше – $\eta = 0,91 \div 0,93$. Немного меньше величина η для случая $C_2 (C_2(W|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = v|_{\Gamma} = 0))$. Здесь $\eta \approx 0,86 \div 0,91$.

Примерно такие же значения η и для сочетания

$C_4 (C_4(W|_{\Gamma} = W'_{\Gamma} = N_x|_{\Gamma} = N_{xy}|_{\Gamma} = 0))$, ($\eta = 0,86 \div 0,91$).

3. Краевой эффект и конкуренция собственных форм

Нелинейное поведение продольно сжатой цилиндрической оболочки вызывает явление конкуренции собственных форм. Эта конкуренция проявляется в непрерывном изменении взаимного расположения собственных форм по мере роста сжимающей нагрузки (рис. 2) в условиях развития значительного осесимметричного изгибного краевого эффекта. Другими словами, кривые соответствующих собственных значений (коэффициенты жесткости в МКЭ) как функций нагрузки P пересекаются между собой. Примером такой конкуренции является задача устойчивости пологой арки ($2\alpha = 6^\circ$, рис. 2).

Расчеты для ряда шарнирно закрепленных и защемленных оболочек в геометрически нелинейной постановке показали (рис. 3), что осесимметричная и кососимметричная формы потери устойчивости остаются первыми вплоть до нагрузки, равной $(0,65-0,7)P_{кр.кл.}$.

Однако далее эти формы «уступают» первое место (соответствующее наименьшей жесткости оболочки) неосесимметричным формам. Эта смена форм потери устойчивости (по мере приближения сжимающей нагрузки к критическому значению) происходит с одновременным более интенсивным развитием нелинейного краевого эффекта. Когда же оболочка достигает предкритического равновесия, то осесимметричной и кососимметричной форм потери устойчивости нет среди первых десяти собственных форм потери устойчивости оболочки (рис. 3).

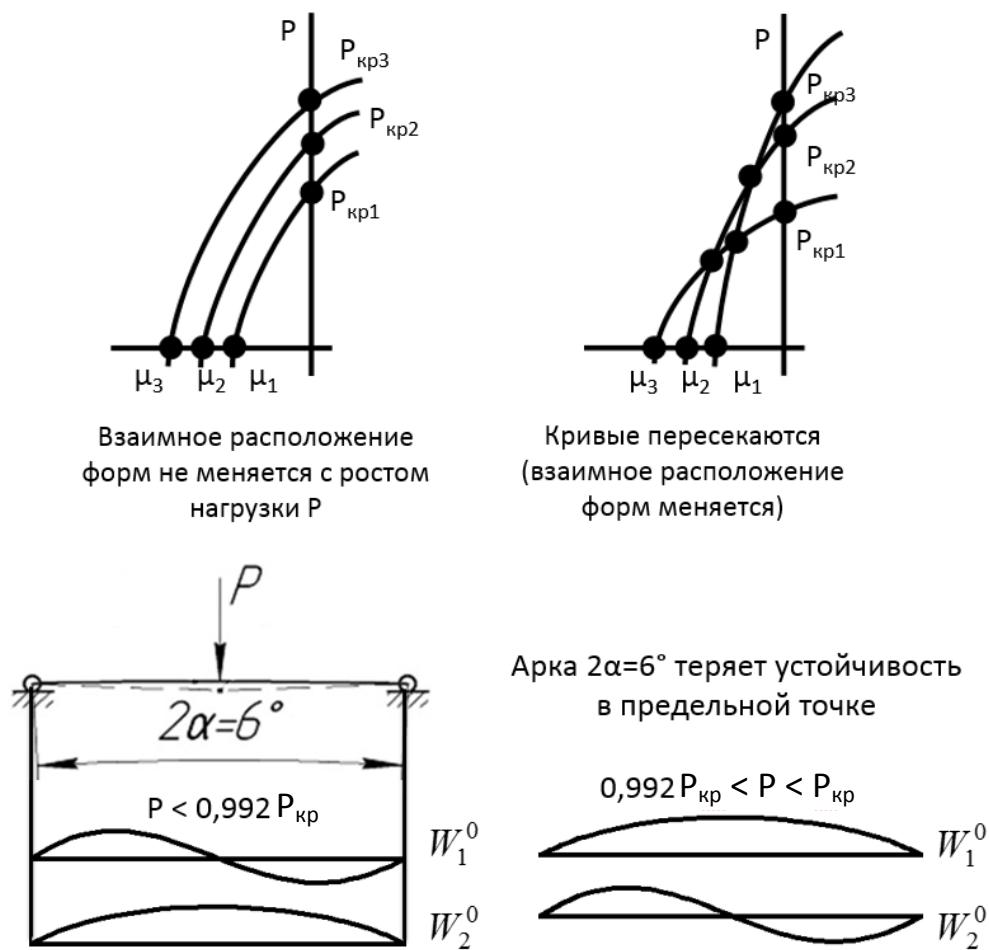


Рис. 2. Конкуренция собственных форм потери устойчивости

В этот момент первые две «нулевые» собственные формы (W_1^0 и W_2^0) – одинаковые. Это циклически симметричные двукратные формы волнообразования, повернутые относительно друг друга на $6,92^\circ$. Поэтому начальное послебифуркационное равновесие образуется

как линейная комбинация этих форм, которая суммируется с осесимметричным предкритическим равновесием

$$\vec{W}_{\text{нач.п/кр}} = \vec{W}_{\text{предкр}} + \xi_1 \vec{W}_1^0 + \xi_2 \vec{W}_2^0.$$

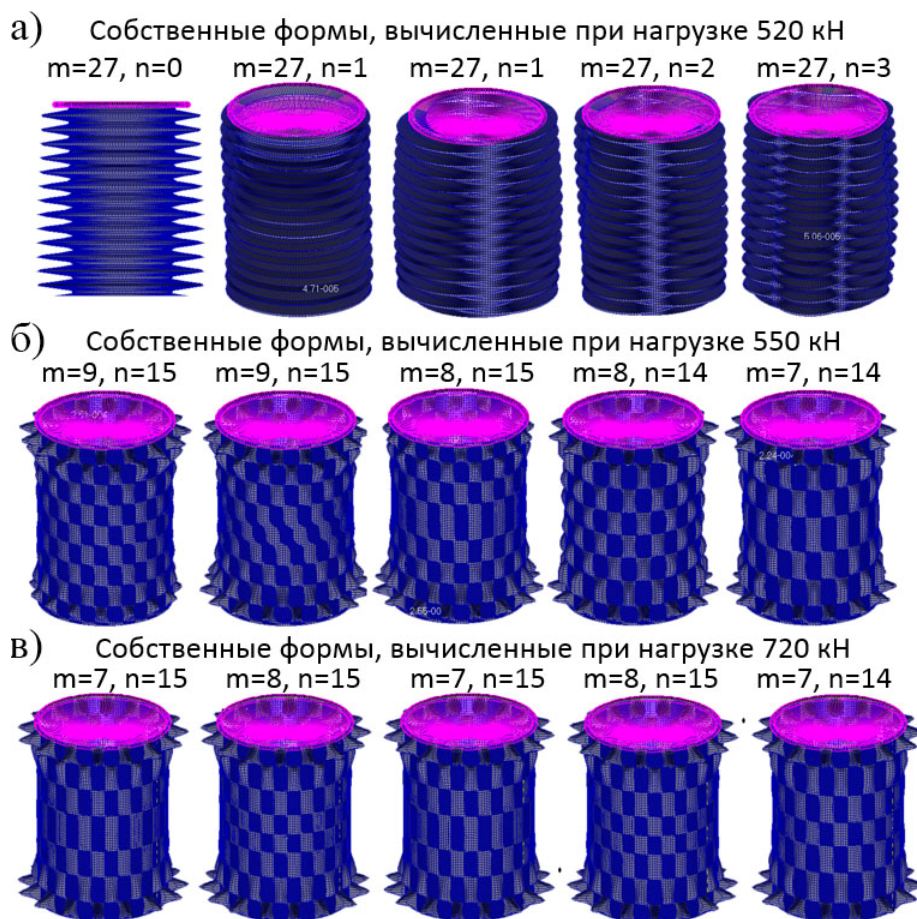


Рис. 3. Первые собственные формы потери устойчивости оболочки Дж. Кролла [8], вычисленные при нагрузках 520, 550 и 720 кН (при $\nu = 0,3$); $P_{\text{кр.кл}} = 798,28$ кН

Напомним, что начальное послекритическое равновесие любой упругой системы есть сумма предкритического равновесия и первой «нулевой» собственной формы потери устойчивости, вычисленной для предкритического равновесия:

$$\vec{W}_{\text{нач.п/кр}} = \vec{W}_{\text{предкр}} + \xi \vec{W}_1^0.$$

«Нулевой» эта собственная форма называется, поскольку жесткость оболочки по этому направлению, определяемая соответствующим собственным значением, равна нулю в критическом равновесии.

Для продольно сжатых цилиндрических оболочек долгое время (70–80 лет) считалось, что упомянутая первая «нулевая» собственная форма есть просто осесимметричная форма (количество поперечных волн $n = 0$) с достаточно большим числом продольных полуволн ($m \neq 0$). Поэтому и начальное послекритическое равновесие считалось осесимметричным, хотя и неустойчивым. Далее следовал хлопок (по нагрузке в условиях кинематического нагружения), после которого имела место известная картина системы послехлопковых ромбо-треугольных вмятин.

Отметим, что благодаря краевому эффекту в приопорной зоне шарнирно закрепленной оболочки создается мощный пояс больших растягивающих окружных мембранных напряжений. Такой пояс (как «обруч») существенно повышает запас устойчивости продольно сжатой оболочки (рис. 4).

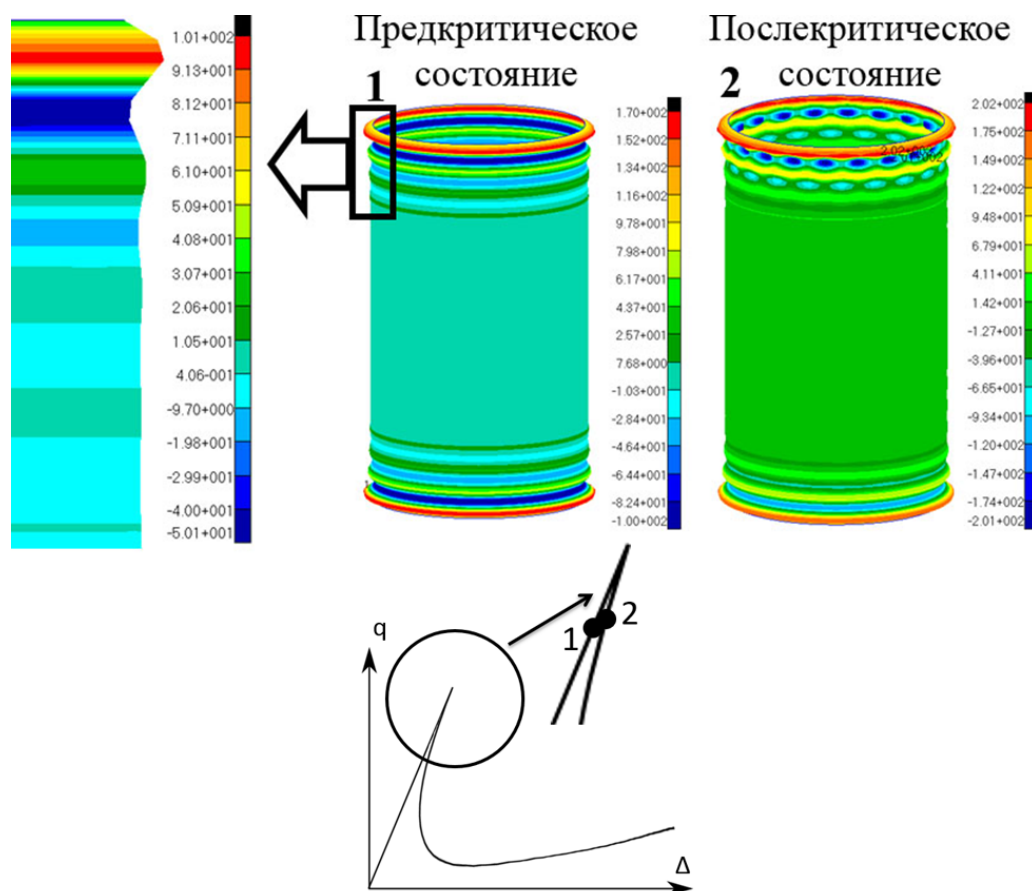


Рис. 4. Распределение напряжений в окружном направлении в предкритическом и послекритическом равновесии (в момент зарождения волнообразования)

Одновременно с этим поясом рядом образуется пояс значительных сжимающих окружных мембранных напряжений. Здесь оболочки испытывают двухосное сжатие – это наиболее провокационная зона с точки зрения начала волнообразования. Действительно, при переходе в начальное послекритическое равновесие именно вдоль зоны этого пояса поперечного сжатия развиваются первые «элементы волнообразования» (рис. 4), которое затем распространяется на всю поверхность оболочки.

4. О реализации классического решения

Классическое решение может быть реализовано, когда не будет развиваться краевой эффект (имеются в виду стандартные условия шарнирного закрепления и заделки). Но при таких закреплениях избежать стеснения Пуассоновского расширения можно, если материал оболочки имеет коэффициент Пуассона, равный нулю ($\nu = 0$). В этом случае справедливо рассмотренное выше линеаризованное классическое решение задачи устойчивости

$$\sigma_{кр} = \frac{E\delta}{\sqrt{3} R} = 0,5773E\delta/R.$$

При этом первая собственная форма потери устойчивости – осесимметричная, и она может быть кратной.

На рис. 5 показаны собственные формы потери устойчивости для оболочки Дж. Кролла ($\nu = 0$) при нулевой нагрузке (рис. 5а) и для предкритического равновесия при $P = 760$ кН (рис. 5б, $P_{кр.кл} = 761,8$ кН). Здесь видно, что начальный порядок расположения первых 5-ти форм сохраняется вплоть до критического равновесия. Следовательно, среди этих собственных форм нет конкуренции при отсутствии краевого эффекта, и при потере устойчивости действительно реализуется «классическое решение».

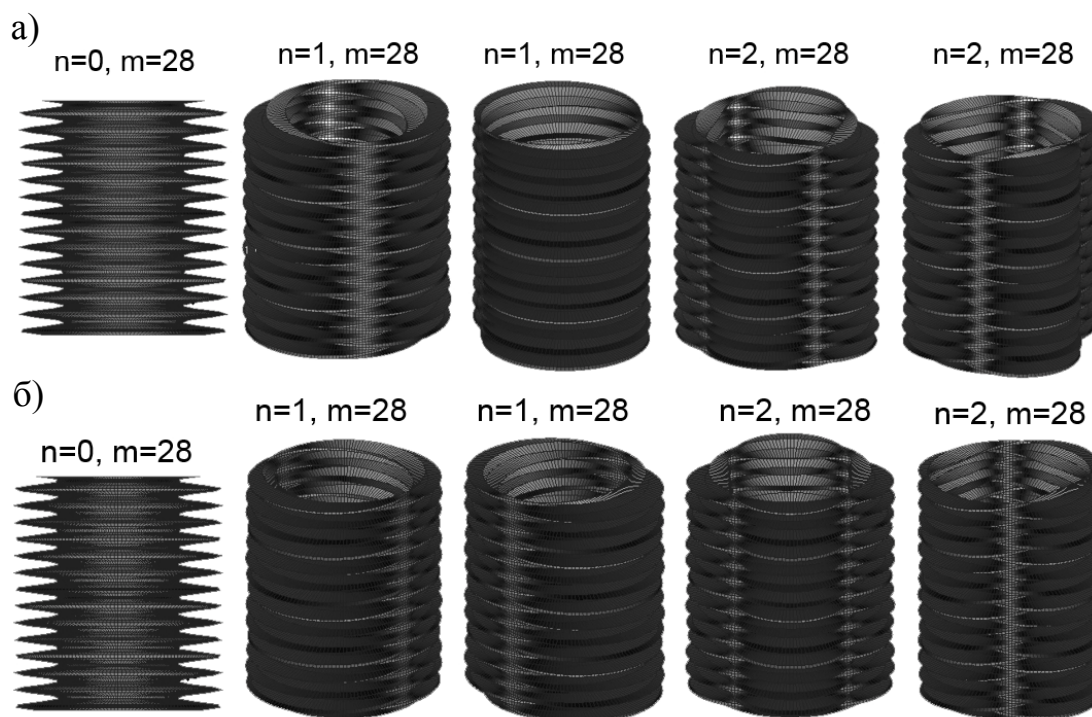


Рис. 5. Собственные формы потери устойчивости оболочки с нулевым коэффициентом Пуассона; $P_{кр.кл} = 761,8$ кН: а) $P = 0$; б) $P = 760$ кН

В то же время в настоящей работе установлено, что даже очень малый ненулевой коэффициент Пуассона ($\nu = 0,05$) немедленно вызывает развитие краевого эффекта и конкуренцию собственных форм вместе со всеми ее последствиями.

5. Об устойчивости оболочки с почти свободным краем

Другой случай отсутствия краевого эффекта – задача устойчивости сжатой оболочки со свободным (или почти свободным) краем, когда отсутствуют краевые радиальные опоры. В 1942 г. Н.А. Кильчевский [9] решил рассматривать задачу устойчивости при граничных условиях свободного края ($W_{xx} = (DW_{xxx} + \sigma\delta W_x) = 0$). Предполагалась осесимметричная форма потери устойчивости. Критическая нагрузка оказалась близкой к половине классической. По-видимому, это объясняется малостью вклада энергии мембранных поперечных деформаций. Как отмечалось ранее, подобная ситуация наблюдалась

и в результатах Алмроса [6] (граничные условия S_3 и S_4), Охиры [5], Ямаки и Кодамы [10]. В этих случаях оболочка сопротивляется выпучиванию практически только за счет энергии изгибных деформаций. В данной работе исследовалась устойчивость сжатой оболочки ($R/\delta = 250$, $R = 250$ мм, $L/R = 4$, $E = 10^4$ кг/мм², $\nu = 0,3$) с почти свободными краями. Для обеспечения геометрической неизменяемости КЭ-модели на верхнем и нижнем краях было поставлено по четыре касательных опоры (рис. 6). Такое закрепление допускало свободное радиальное пуассоновское расширение оболочки, обеспечивающее сохранение круговой формы поперечного сечения (рис. 6). Линеаризованный расчет дал критическую нагрузку $P_{кр}^B = 143,6$ кН. Геометрически нелинейный расчет показал, что $P_{кр}^B = 160$ кН. Последнее число составляет $\sim 0,42P_{кр.кл.}$, равное 380 кН. Формы потери устойчивости как в линеаризованном, так и в нелинейном расчетах весьма похожи друг на друга. Наиболее сильные прогибы развиваются на верхнем крае оболочки. Образующие слабо искривлены и наклонены к вертикали, что указывает на характер деформации, близкий к геометрическому изгибанию. Здесь также невелика роль поперечных мембранных напряжений в сопротивлении оболочки выпучиванию.

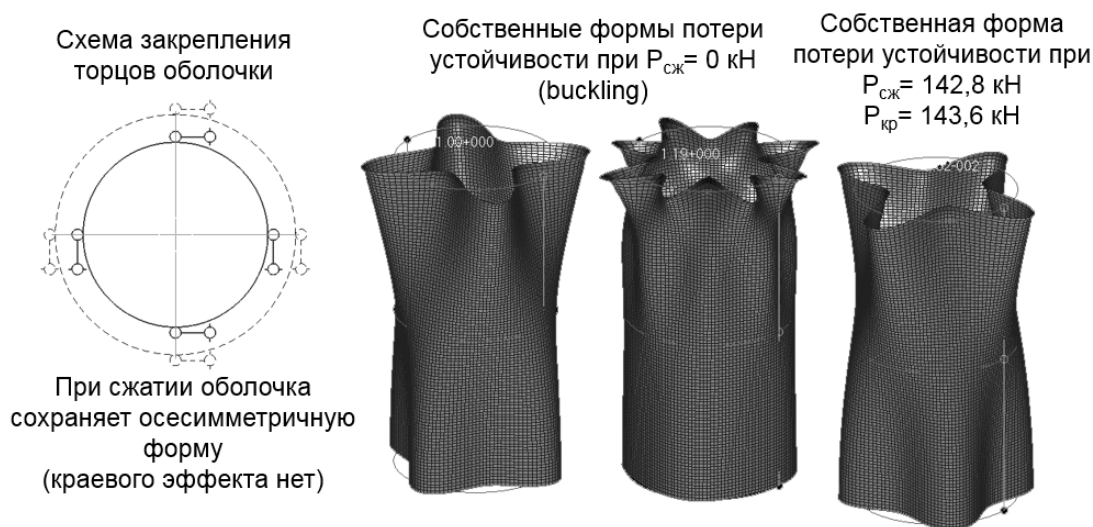


Рис. 6. Собственные формы потери устойчивости оболочки с касательным закреплением краев

Были выполнены расчеты этой же оболочки при постановке касательных опор во всех 140 узлах КЭ-сетки вдоль каждого края оболочки. Наложение дополнительных связей должно согласно теореме Релея увеличить критическую нагрузку. Действительно, линейный расчет на собственные значения (при нулевом сжатии) показал, что $P_{кр} = 199,3$ кН ($\eta = 0,524$), для геометрически нелинейного расчета критическая нагрузка была близка к этому значению и составила ~ 206 кН ($\eta = 0,524$). Формы потери устойчивости оказались практически одинаковыми ($n = 6, m = 3$, рис. 7).

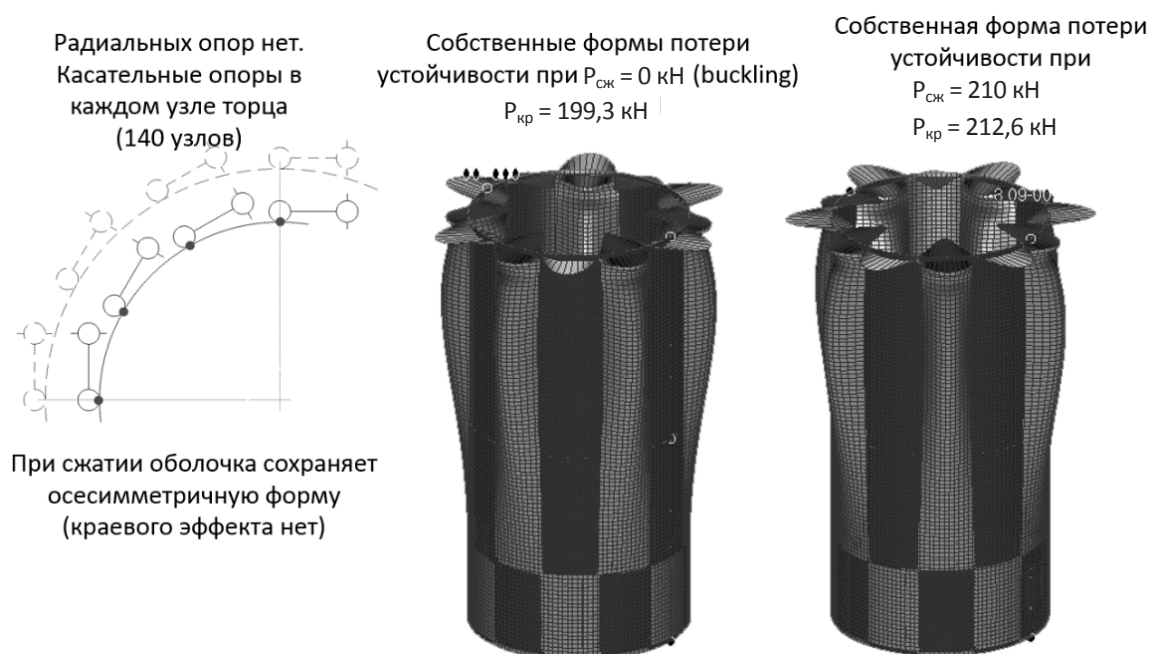


Рис. 7. Собственные формы потери устойчивости цилиндрической оболочки при касательном закреплении краев при «полном» касательном закреплении края

Наиболее интенсивное волнообразование наблюдалось вблизи верхнего свободного края оболочки. Ниже этой зоны своеобразного «краевого эффекта» искривление образующих было достаточно слабым. Почти половинное значение критической нагрузки и слабо искривленная форма потери устойчивости оболочки позволяют предположить, что и в этом случае поперечные мембранные деформации почти не участвуют в сопротивлении оболочки выпучиванию.

Список литературы

1. Вольмир, А.С. Гибкие пластинки и оболочки / А.С. Вольмир. – М.: Гостехиздат, 1956. – 419 с.
2. Тимошенко, С.П. Курс теории упругости / С.П. Тимошенко. – Киев: Наукова думка, 1972. – 567 с.
3. Геккелер, И.В. Статика упругого тела / И.В. Геккелер. – М.: Гостехиздат. – 1934. – 288 с.
4. Fisher, G.N. Uber den Einfluss der gelenkigen Lagerung auf die Stabilitat diinnwandiger Kreiszyinderschalen unter Axial- und Innendruck / G.N. Fisher // Flugwissenschaten. – 1963. – N 11(3). – P. 111–116.
5. Ohira, H. Local buckling theory of axially compressed cylinders / H. Ohira // Proceedings of the eleventh Japan national congress of applied mechanics. – Tokyo, 1961. – P. 37–40.
6. Almroth, B.O. Postbuckling behavior of axially compressed circular cylinders / B.O. Almroth // AIAA J. – 1963. – N 1(3). – P. 630–633.
7. Hoff, N.J. Buckling of axially compressed circular cylindrical shells at stresses smaller than the classical critical value / N.J. Hoff, L.W. Rehfield // J. Appl. Mech. – 1965. – Vol. 32. – P. 533–538.
8. Croll, J.G.A. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders / J.G.A. Croll, R.A. Batista // Int. J. Mech. Sci. 23. – 1981. – N 6. – P. 331–343.
9. Кильчевский, Н.А. Об осесимметричных деформациях и упругой устойчивости круглой трубы, находящейся под действием сжимающих сил / Н.А. Кильчевский // Прикладная механика и математика. – 1942. – № 6. – С. 497–508.
10. Yamaki, H. Buckling of circular cylindrical shells under compression. Report 1 / H. Yamaki, S. Kodama // Sci. Repts. Res. Inst. Tohoku Univ. – 1971. – Vol. 23. – P. 99–123.

References

1. Vol'mir A.S. *Gibkie plastinki i obolochki* (Flexible plates and shells), Moscow, Gostekhizdat, 1956, 419 p.
2. Timoshenko S.P. *Kurs teorii uprugosti* (The course of theory of elasticity), Kiev, Naukova dumka, 1972, 567 p.
3. Gekker I.V. *Statika uprugogo tela* (Elastic body statics), Moscow, Gostekhizdat, 1934, 288 p.
4. Fisher G.N. Uber den Einfluss der gelenkigen Lagerung auf die Stabilitat diinnwandiger Kreiszyinderschalen unter Axial- und Innendruck, *Flugwissenschaften*, 1963, no. 11(3), pp. 111–116.
5. Ohira H. Local buckling theory of axially compressed cylinders, *Proceedings of the eleventh Japan national congress of applied mechanics*, Tokyo, 1961, pp. 37–40.
6. Almroth B.O. Postbuckling behavior of axially compressed circular cylinders, *AIAA J*, 1963, no. 1(3), pp. 630–633.
7. Hoff N.J., Rehfield L.W. Buckling of axially compressed circular cylindrical shells at stresses smaller than the classical critical value, *J. Appl. Mech*, 1965, vol. 32, pp. 533–538.
8. Croll J.G.A., Batista R.A. Explicit lower bounds for the buckling of axially loaded cylinders, *Int. J. Mech, sci.* 23, 1981, no. 6, pp. 331–343.
9. Kil'chevskij N.A. *Prikladnaya mekhanika i matematika*, 1942, no. 6, pp. 497–508.
10. Yamaki H., Kodama S. *Sci. Repts. Res. Inst. Tohoku Univ*, 1971, vol. 23, pp. 99–123.