УДК 621.822.833:539.3

Сорокин Фёдор Дмитриевич, д-р техн. наук, проф.,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5, sorokin_fd@mail.ru
Чжан Хао, аспирант,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5,
zhang274234111@yandex.ru

РАСЧЕТ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОЛЕЦ КОНИЧЕСКОГО ПОДШИПНИКА С УЧЕТОМ ИНЕРЦИОННЫХ СИЛ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

Аннотация. Конические подшипники являются важными структурными элементами машин и приборов из-за их отличительной особенности – высокой грузоподъемности при восприятии осевых и радиальных, а также моментных нагрузок. При решении задач роторной динамики вращающихся машин большое значение имеет расчёт относительных перемещений колец подшипника, которые, в принципе, могут быть определены методом конечных элементов. Однако модели, состоящие из конечных элементов, практически непригодны для решения задач роторной динамики, так как обычно требуют неприемлемо больших ресурсов компьютера. В связи с этим в данной работе описана новая методика для расчета относительных перемещений колец подшипника на основе энергетического подхода с учетом инерционных сил и гироскопических моментов. С использованием данной модели исследовалась упругая характеристика конического подшипника типа 30208А при разных угловых скоростях. Сопоставление результатов разработанной модели с известными результатами показало их хорошую сходимость.

Ключевые слова: конический подшипник, энергетическая модель, метод установления, матрица жесткости, вектор сил.

Sorokin Fedor D., Dr. Sc., professor,
Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya street,
Moscow, 105005, Russia, sorokin_fd@mail.ru
Zhang Hao, graduate student,
Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya street,
Moscow, 105005, Russia, zhang274234111@yandex.ru

A CALCULATION OF RELATIVE MOVEMENTS OF RINGS OF A TAPERED ROLLER BEARING WITH INERTIAL FORCES AND GYROSCOPIC MOMENTS

Abstract. Tapered bearings are important structural elements of machines and devices because of their distinctive features, i.e, high axial and radial load capacities, as well as moment loads. When solving the problems of the rotor dynamics of rotating machines, great importance is played by the calculation of the relative movements of the bearing rings, which in principle can be determined by the finite element method. However, models consisting of finite elements are practically unsuitable for solving problems of rotary dynamics, since they usually require unacceptably large computer resources. In this regard, in this paper, a new model has been developed for calculating the relative movements of bearing rings based on the energy approach, taking into account inertial forces and gyroscopic moments. With the use of this model, the elastic characteristic of a tapered roller bearing typed 30208A at different angular velocities was investigated. In comparison with known results, results of developed model show their good veracity.

Key words: tapered roller bearing, energy model, pseudo-viscosity method, stiffness matrix, force vector.

Введение

Из большого количества существующих математических моделей роликовых подшипников [1–7] наиболее простой и информативной является модель, предложенная De Mul в работе [6]. Но методика вывода уравнений равновесия роликов в [6] требует привлечения громоздких выражений для сил и моментов с использованием вспомогательной системы координат. Кроме того, рекомендованный в [6] для определения равновесного положения роликов метод Ньютона не обеспечивает сходимости. Фактически метод Ньютона удается применить только для сильно зажатого ролика, то есть для одного из частных случаев, что при построении универсальных алгоритмов крайне неудобно.

Van-Canh Tong исследовал нагрузочные характеристики конического подшипника с использованием модели De Mul. В его статье [7] с целью упрощения расчета использовано дополнительное допущение о линейном изменении зазоров (или поджатий), которое, по мнению авторов, не пригодно для построения универсальных алгоритмов.

В данной работе идеи De Mul получили дальнейшее развитие, при этом оказалось, что вместо законов статики гораздо проще и удобнее использовать энергетические подходы. Силы, действующие на ролик со стороны колец и бортиков, а также матрица жесткости ролика сравнительно просто вычисляются через первые и вторые производные энергии деформаций. Для того чтобы избежать расходимости итерационного процесса, вместо метода Ньютона предлагается использовать метод установления, который всегда сходится.

С целью контроля выполнено сопоставление результатов данной модели с известными результатами, полученными немецкой компанией FAG, и показана их хорошая сходимость.

Модель конического подшипника

Конический подшипник (рис. 1) состоит из наружного и внутреннего колец, роликов и сепаратора. Ролики приняты упругими телами. Каждое из колец считается жестким телом с 6-ю степенями свободы, но с возможностью локального деформирования, то есть кольцо в целом перемещается как абсолютно твердое тело, но местные (контактные) деформации колец учитываются коэффициентами. Перемещения колец рассматриваются в глобальной системе координат *OXYZ*.

Движение роликов принимается плоским (3 степени свободы в системе координат *OZr*).

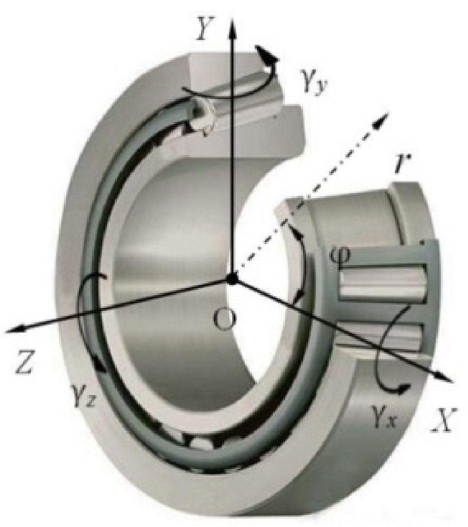

*Рис. 1. Элементы роликового подшипника
и используемые системы координат*

Для моделирования ролика из работы [6] заимствована техника разбиения тела вращения на отдельные диски (slicing), согласно которой ролик можно рассматривать как набор тонких дисков, жестко закрепленных на оси ролика (рис. 2).

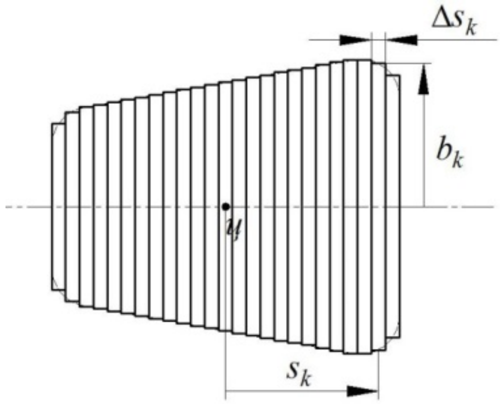

Рис. 2. Разбиение ролика на отдельные диски

При использовании указанной техники геометрия ролика задается массивом чисел

$$\{\{s_1, b_1, \Delta s_1\}, \{s_2, b_2, \Delta s_2\}, \ldots, \{s_n, b_n, \Delta s_n\}\},$$

где расстояние до текущей шайбы (диска) s_k отсчитывается от центра ролика; b_k – радиус диска; Δs_k – ширина диска с номером k.

При моделировании контактного взаимодействия предполагается, что упругие свойства каждого диска с номером k могут быть описаны следующим степенным законом:

$$q_k = C \cdot |\delta_k|^n, \ (\delta_k < 0), \qquad (1)$$

где q_k – распределённая нагрузка на единицу контактной длины диска, δ_k – расстояние до контактной поверхности (отрицательное расстояние означает контакт), C – приведённая контактная жёсткость [Н/м$^{n+1}$], n – показатель степени в законе упругости нелинейной контактной задачи n = 10/9.

В случае контакта ролика с бортиками (*flang*) для контактной силы P_{flang} приближенно справедливо соотношение, аналогичное (1), но с показателем степени n = 3/2.

Вычисление зазоров между роликом, дорожками качения и бортиками

Вычисление боковых зазоров продемонстрировано на рис. 3. Радиусы-векторы на рис. 3 помечают точки контакта: $\mathbf{o}_e$ – внешнего кольца; $\mathbf{o}_i$ – внутреннего кольца; $\mathbf{op}_{e,i}$ – ролика. Векторы исходного и актуального положений связываются между собой формулой кинематики плоского движения:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}\cos\theta + \mathbf{k}\times\mathbf{a}\sin\theta + \mathbf{u}, \tag{2}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ – радиусы-векторы в исходном и актуальном положениях; θ – угол поворота; $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; $\mathbf{k}$ – единичная нормаль к плоскости движения.

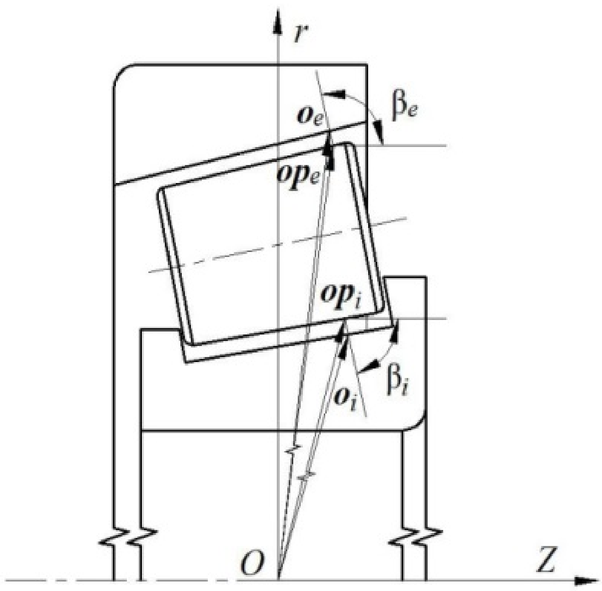

Рис. 3. Радиусы-векторы и направления нормалей для контактных точек

Величины зазоров (поджатий) находятся как проекции векторов, связывающих точки контактирующих поверхностей, на нормали к этим поверхностям:

$$\delta^e = \delta_0^e + (\mathbf{o}'_e - \mathbf{o}_e - \mathbf{op}'_e + \mathbf{op}_e)\cdot\mathbf{n}_e;\;\; \delta^i = \delta_0^i + (\mathbf{o}'_i - \mathbf{o}_i - \mathbf{op}'_i + \mathbf{op}_i)\cdot\mathbf{n}_i,$$

где δ_0^e, δ_0^i – исходные зазоры; $\mathbf{n}_e$, $\mathbf{n}_i$ – нормали к поверхностям в точках контакта; i, e – индексы, помечающие внутреннее и внешнее кольца;

штрихом помечены радиусы-векторы актуального состояния, вычисленные по формуле (2).

Вычисление вектора сил и матрицы жёсткости ролика по его энергии деформаций

Ролик контактирует с боковыми и торцевыми поверхностями. Энергия упругих деформаций ролика, вызванная контактом боковых поверхностей ролика и колец, получается суммированием энергий по всем дискам

$$U_{int} = \frac{9}{19}\sum_k C_{int}|\delta_k^{int}|^{19/9}\Delta s_k, \ (\delta_k^{int} < 0);$$
$$U_{ext} = \frac{9}{19}\sum_k C_{ext}|\delta_k^{ext}|^{19/9}\Delta s_k, \ (\delta_k^{ext} < 0). \quad (3)$$

Контакт на торцевых поверхностях принят точечным аналогично [1].

$$U_{flang} = \frac{2}{5}\sum_{m=1}^{4} C_m^{flang}\left|\delta_m^{flang}\right|^{5/2}, \ (\delta_m^{flang} < 0), \quad (4)$$

где C^{flang} – контактная жёсткость в законе Герца (принимается нулевой, если соответствующего бортика не существует).

Матрица жёсткости и вектор сил ролика были найдены дифференцированием полной энергии деформаций ролика, полученной суммированием выражений (3) и (4) по формулам (5)

$$P_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial y_i \partial y_j}, \quad (5)$$

где i, j – номера относительных перемещений ролика ($i = 1, \ldots, 3; j = 1, \ldots, 3$).

Поиск положения равновесия ролика методом установления

При вычислении полной энергии ролика все величины рассматриваются как функции трех относительных перемещений ролика $\mathbf{y}_r = (u_r, v_r, \vartheta_r)^T$, что согласно (5) дает суммарный вектор сил $\mathbf{P}_r(\mathbf{y}_r)$

(две силы и момент), действующих на ролик со стороны колец и бортиков. Перемещения колец при этом считаются известными.

Идея метода установления состоит в том, что для решений многих стационарных задач математической физики, описывающих равновесные состояния, рассматривают последние как результат установления развивающегося во времени процесса, расчет которого часто оказывается проще, чем прямой расчет равновесного состояния [8].

Согласно методу установления, задачу статики $\mathbf{P}_r(\mathbf{y}_r) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$ можно заменить задачей динамики затухающего движения:

$$[\mathbf{M}]\frac{d^2\mathbf{y}_r}{dt^2} + [\mathbf{C}]\frac{d\mathbf{y}_r}{dt} = \mathbf{P}_r(\mathbf{y}_r) + \mathbf{F}, \qquad (6)$$

где $[\mathbf{M}]$ – матрица масс, $[\mathbf{C}]$ – матрица демпфирования,
$\mathbf{F}$ – вектор инерционных сил и гироскопических моментов.

Система дифференциальных уравнений (6) с нулевыми начальными условиями интегрировалась численно. Вследствие наличия демпфирования движение ролика затухает, и при $t \to \infty$ вектор перемещений $\mathbf{y}_r$ даст решение уравнения равновесия $\mathbf{P}_r(\mathbf{y}_r) + \mathbf{F} = \mathbf{0}$.

Далее, с помощью формул (5), реализованных в математическом пакете [9], в которые подставляются найденные равновесные координаты ролика $\mathbf{y}_r$, вычисляется матрица жесткости ролика $[\mathbf{K}_{rr}]$.

Построение матрицы жесткости и вектора сил полной модели подшипника

Так как каждое из контактирующих тел (внешнее кольцо, внутреннее кольцо, ролик) имеет в локальной системе координат 3 степени свободы, то вся система в рабочей плоскости ролика имеет 9 степеней свободы. Матрица жесткости 9×9 и вектор сил такой системы, состоящей из 3-х тел, строятся по формулам (5), но при этом i, j – номера полных (не относительных) перемещений колец и ролика (i = 1, …, 9; j = 1, …, 9).

По отношению к кольцам ролик играет роль промежуточного упругого элемента, поэтому его степени свободы исключались из системы. В МКЭ этот процесс называется «конденсацией», он выполнялся по стандартной методике, что позволило получить локальную матрицу жесткости системы двух колец размерностью 6×6.

Переход из рабочей плоскости ролика в глобальную систему координат всего подшипника выполнялся стандартным приемом, основанным на использовании матриц трансформации. Последующее суммирование по всем роликам дает матрицу жесткости 12×12 и вектор сил 12×1 полной модели подшипника.

Верификация энергетической модели роликового подшипника по результатам натурных экспериментов

С использованием данной модели исследовано влияние инерционных сил и момента на поведение конического подшипника типа 30208A. В рассмотренном примере внешнее кольцо закреплено, а на внутреннее кольцо действуют нагрузки: P_y = –10000 Н, P_z = 45000 Н, M_x = 78,9 Н·м. Угловая скорость внутреннего кольца варьировалась от 5000 до 25000 об/мин. Этот же подшипник рассматривался специалистами известной подшипниковой компании Германии – FAG [10]. Сравнение результатов показано на рис. 4.

Заключение

Известная модель роликового подшипника De Mul была существенно усовершенствована с использованием энергетического подхода и метода установления, который в ряде случаев был заменен квазиньютоновским методом. Сопоставление полученных результатов с результатами фирмы FAG для конического подшипника типа 30208A показало хорошую сходимость методики и высокую точность.

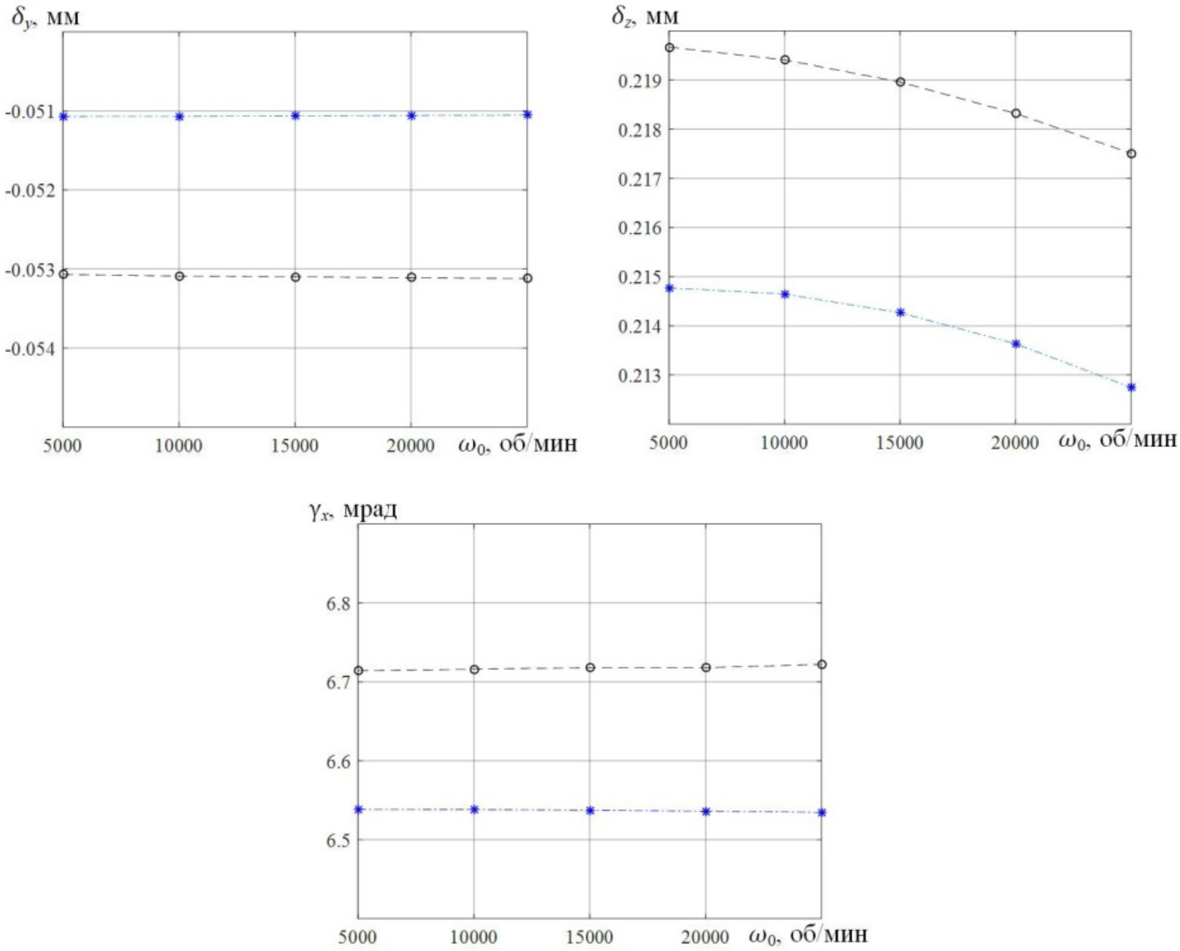

Рис. 4. Сопоставление результатов исследования с результатами компании FAG:
«--o--» – результаты компании FAG; «-·--·-» – результаты данной модели*

Список литературы

1. Houpert, L. An enhanced study of the load-displacement relationships for rolling element bearings / L. Houpert // Journal of Tribology. – 2014. – Vol. 136, is. 1. – P. 011105–011116.

2. Guo, Y. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model / Y. Guo, R.D. Parker // Mechanism & Machine Theory. – 2012. – Vol. 51, is. 5. – P. 32–45.

3. Cavallaro, G. Analysis of high-speed inter-shaft cylindrical roller bearing with flexible rings / G. Cavallaro, D. Ne´Lias, F. Bon // Tribology Transactions. – 2005. – Vol. 48, is. 2. – P. 154–164.

4. Antoine, J.F. Approximate analytical model for Hertzian elliptical contact problems / J.F. Antoine, C. Visa, C. Sauvey // Journal of Tribology. – 2016. – Vol. 128, is. 3. – P. 660–664.

5. Leblanc, A. Nonlinear dynamic analysis of cylindrical roller bearing with flexible rings / A. Leblanc, D. Nelias, C. Defaye // Journal of Sound & Vibration. – 2009. – Vol. 325, is. 1. – P. 145–160.

6. De Mul, J.M. Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction: Part II: Application to Roller Bearings and Experimental Verification / J.M. De Mul, J.M. Vree, D.A. Maas // Journal of Tribology. – 1989. – Vol. 111, is. 1. – P. 142–148.

7. Tong, V.C. Characteristics of Tapered Roller Bearing Subjected to Combined Radial and Moment Loads / V.C. Tong, S.W. Hong // IJPEMGT. – 2014. – Vol. 1, is. 4. – P. 323–328.

8. Годунов, С.К. Разностные схемы. Введение в теорию / С.К. Годунов, В.С. Рябенький. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

9. Дьяконов, В.П. Компьютерная математика. Теория и практика / В.П. Дьяконов. – СПб.: Питер, 2001. – 1296 с.

10. Schaeffler Technologies, “BEARINX-Online Shaft Calculation”. – URL: http://www.schaeffler.de/content.schaeffler.de/en/products_services/inafagproducts/calculating/bearinxonline/bearinx_online.jsp

References

1. Houpert L. An enhanced study of the load-displacement relationships for rolling element bearings, Journal of Tribology, 2014, vol. 136, is. 1, pp. 011105–011116.

2. Guo Y., Parker R.D. Stiffness matrix calculation of rolling element bearings using a finite element/contact mechanics model, Mechanism & Machine Theory, 2012, vol. 51, is. 5, pp. 32–45.

3. Cavallaro G., Ne´lias D., Bon F. Analysis of high-speed inter-shaft cylindrical roller bearing with flexible rings, Tribology Transactions, 2005, vol. 48, is. 2, pp. 154–164.

4. Antoine J.F., Visa C., Sauvey C. Approximate analytical model for Hertzian elliptical contact problems, Journal of Tribology, 2016, vol. 128, is. 3, pp. 660–664.

5. Leblanc A., Nelias D., Defaye C. Nonlinear dynamic analysis of cylindrical roller bearing with flexible rings, Journal of Sound & Vibration, 2009, vol. 325, is. 1, pp. 145–160.

6. De Mul J.M., Vree J.M., Maas D.A. Equilibrium and Associated Load Distribution in Ball and Roller Bearings Loaded in Five Degrees of Freedom While Neglecting Friction: Part II: Application to Roller Bearings and Experimental Verification, Journal of Tribology, 1989, vol. 111, is. 1, pp. 142–148.

7. Tong V.C., Hong S.W. Characteristics of Tapered Roller Bearing Subjected to Combined Radial and Moment Loads, IJPEMGT, 2014, vol. 1, is. 4, pp. 323–328.

8. Godunov S.K., Rjaben’kij V.S. *Raznostnye skhemy. Vvedenie v teoriyu* (Difference scheme. Introduction to the theory), Moscow, Nauka, 1977, 440 p.

9. D’jakonov V.P. Komp’juternaja matematika. Teorija i praktika (Computer mathematics. Theory and practice), Saint-Petersburg, Piter, 2001, 1296 p.

10. URL: http://www.schaeffler.de/content.schaeffler.de/en/products_services/inafagproducts/calculating/bearinxonline/bearinx_online.jsp