

УДК 534.1

Бондаренко Николай Иванович, канд. техн. наук, доц.,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5, panalv@mail.ru

Обносков Константин Борисович, канд. техн. наук, доц.,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5, panalv@mail.ru

Паншина Алла Викторовна, канд. физ.-мат. наук, доц.,
МГТУ им. Н.Э. Баумана, Россия, 105005, Москва, 2-я Бауманская, д. 5, panalv@mail.ru

О НЕКОТОРЫХ КОЛЕБАНИЯХ МЕХАНИЗМА ПЛАНЕТАРНОГО ТИПА

Аннотация. В статье рассматривается задача определения устойчивого и неустойчивого положений равновесия механической системы типа планетарного механизма с одной степенью свободы. Механизм совершает колебания в вертикальной плоскости. Исследуется функция потенциальной энергии механизма. Также методом фазовой плоскости исследуются особенности свободных нелинейных колебаний механизма. Построены фазовые портреты. Математическая модель механической системы, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений, позволяет обнаруживать и исследовать такие моменты в поведении системы, которые недоступны в линейной теории. Проведен анализ зависимости числа положений равновесия от изменения значений некоторых параметров системы. Показано, что рассматриваемый механизм в зависимости от его геометрических характеристик может иметь одно или несколько положений устойчивого равновесия.

Ключевые слова: фазовый портрет, положение равновесия, центр, седло, бифуркация.

Bondarenko Nikolay I., Ph. D., associate professor,
Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya street,
Moscow, 105005, Russia, panalv@mail.ru

Obnosov Konstantin B., Ph. D., associate professor,
Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya street,
Moscow, 105005, Russia, panalv@mail.ru

Panshina Alla V., Ph. D., associate professor,
Bauman Moscow State Technical University, 5, 2-ya Baumanskaya street,
Moscow, 105005, Russia, panalv@mail.ru

ABOUT SOME OF THE OSCILLATIONS IN THE MECHANISM OF THE PLANETARY TYPE

Abstract. The article deals with the problem of determining stable and unstable equilibrium positions of the mechanical system of planetary mechanism type with one degree

of freedom. The mechanism oscillates in a vertical plane. The function of the potential energy of the mechanism is studied. The features of free nonlinear oscillations of the mechanism are also investigated by the phase plane method. Built phase portraits. The mathematical model of the mechanical system, described by a system of nonlinear differential equations, allows to detect and investigate such moments in the behavior of the system, which are not available in linear theory. The analysis of the dependence of the number of equilibrium positions on changes in the values of some parameters of the system. It is shown that the considered mechanism, depending on its geometric characteristics, can have one or more stable equilibrium positions.

Key words: phase portrait, equilibrium, center, seat, bifurcation.

Введение

Цель данной работы – исследование и демонстрация особенностей нелинейных колебаний реального механизма – механизма планетарного типа. Подобные механизмы нашли применение в планетарных редукторах, автомобильных дифференциалах, бортовых планетарных передачах ведущих мостов тяжелых автомобилей [1, 2]. Были изучены колебания математической модели. На сконструированном лабораторном макете проведены опытные подтверждения некоторых полученных данных.

Математическая модель механической системы, описываемая системой нелинейных дифференциальных уравнений, позволяет обнаруживать и исследовать такие моменты в поведении системы, которые недоступны в линейной теории [3–6].

Описание и схема механизма

Механизм расположен в вертикальной плоскости (рис. 1). Его движение происходит под действием сил тяжести. Сателлит 1 может кататься без проскальзывания по неподвижной цилиндрической поверхности. Его ось скреплена с водилом 2, которое может вращаться около неподвижной горизонтальной оси Oz . К сателлиту жестко прикреплен невесомый стержень 5 с грузом 3. Груз фиксируется на стержне на некотором расстоянии l_3 от оси сателлита. На водиле на расстоянии $OD = l_4$ находится противовес 4. В положении механизма,

которое будем называть нулевым, ось сателлита A лежит на одной вертикали и ниже оси O водила 2, продольная ось стержня 5 отклонена от вертикали на угол α , и груз 3 находится выше оси сателлита A^* .

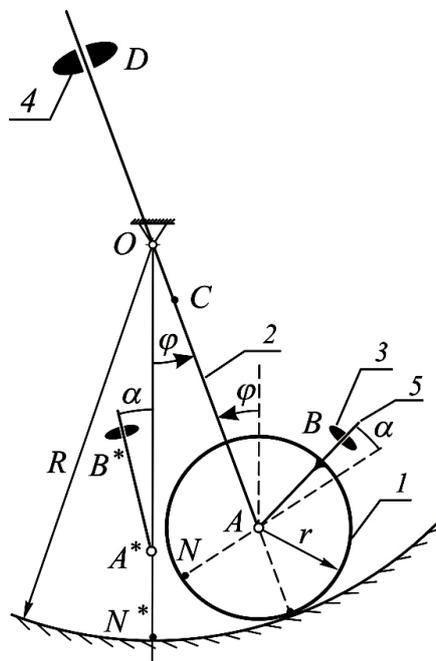


Рис. 1. Схема механизма

Введём обозначения: M_1 – масса сателлита, M_2 – масса водила, M_3 – масса груза, M_4 – масса противовеса, R – радиус цилиндрической поверхности, r – радиус сателлита, l_3 – расстояние от оси сателлита A до груза 3, l_4 – расстояние от оси O водила 2 до противовеса 4, L – длина водила, φ – угол между вертикалью и водилом 2.

Меняя значения заданных параметров, можно получить разное количество положений равновесия системы и разное количество классов движений механизма.

Построение математической модели

У механизма одна степень свободы. В качестве обобщённой координаты примем угол φ – угол отклонения водила от вертикали.

Потенциальная и кинетическая энергии системы имеют вид [9, 10]:

$$\Pi(\varphi) = g \cdot \{[(M_1 + M_2 + M_3) \cdot (R - r) - M_2 \cdot L/2 - M_4 l_4] \cdot (1 - \cos \varphi) + M_3 l_3 \cdot [\cos \left(\frac{R - r}{r} \varphi - \alpha \right) - \cos \alpha]\}.$$

$$T = 0,5 \cdot \{M_1 \cdot (R - r)^2 + J_{1A} \cdot \frac{(R - r)^2}{r^2} + M_2 \cdot \left[\frac{L^2}{12} + (R - r - \frac{L}{2})^2 \right] + M_3 \cdot (R - r)^2 \cdot [1 + 2 \cdot \frac{l_3}{r} \cdot \cos \left(\frac{R}{r} \varphi - \alpha \right) + \frac{l_3^2}{r^2} + M_4 \cdot l_4^2] \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} A(\varphi) \cdot \dot{\varphi}^2.$$

Для рассматриваемой механической системы справедлив закон сохранения полной механической энергии: $H = T + \Pi = \text{const} = h$.

То есть

$$H(\varphi, \dot{\varphi}) = \{M_1 (R - r)^2 + J_{1A} \cdot \frac{(R - r)^2}{r^2} + M_2 \left[\frac{L^2}{12} + \left(R - r - \frac{L}{2} \right)^2 \right] + M_3 (R - r)^2 \cdot [1 + 2 \cdot \frac{l_3}{r} \cdot \cos \left(\frac{R}{r} \varphi - \alpha \right) + \frac{l_3^2}{r^2} + M_4 l_4^2] \cdot \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + g \{[(M_1 + M_2 + M_3)(R - r) - M_2 \cdot L/2 - M_4 l_4](1 - \cos \varphi) + M_3 l_3 [\cos \left(\frac{R - r}{r} \varphi - \alpha \right) - \cos \alpha]\} = h.$$

Исследование положений устойчивого равновесия

Положения равновесия системы определяются равенством [7, 8]:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \varphi} = 0.$$

В нашем случае это равенство принимает вид:

$$g \{[(M_1 + M_2 + M_3) \cdot (R - r) - M_2 \cdot L/2 - M_4 l_4] \sin \varphi - M_3 l_3 \frac{R - r}{r} \sin \left(\frac{R - r}{r} \varphi - \alpha \right)\} = 0.$$

Или

$$A \cdot \sin \varphi = B \cdot \sin \left(\frac{R - r}{r} \varphi - \alpha \right), \quad (1)$$

где $A = (M_1 + M_2 + M_3)(R - r) - M_2 L/2 - M_4 l_4$, $B = M_3 l_3 \frac{R - r}{r}$.

Равенство (1) можно рассмотреть как трансцендентное уравнение относительно угла φ . Для наглядности анализа использован графический метод решения. Значения угла φ , при которых графики функций

$$f_1(\varphi) = A \cdot \sin \varphi, \quad f_2(\varphi) = B \cdot \sin \left(\frac{R-r}{r} \varphi - \alpha \right)$$

пересекаются, и есть решение уравнения.

Так как $T + \Pi = A(\varphi) \frac{\dot{\varphi}^2}{2} + \Pi(\varphi) = h$, то

$$\dot{\varphi} = \pm \sqrt{\frac{2[h - \Pi(\varphi)]}{A(\varphi)}}. \quad (2)$$

С помощью равенства (2) будут строиться фазовые траектории.

Расчеты проводились при различных значениях параметров системы.

Фиксированные параметры механизма: $M_1 = 0,2$ кг, $M_2 = 0,5$ кг, $M_3 = 0,4$ кг, $M_4 = 0,5$ кг, $R = 0,55$ м, $r = 0,1$ м, $l_4 = 0,15$ м, $L = 0,8$ м.

Вариант I. Угол $\alpha = \pi$.

Случай 0. $l_3 = 0$ м. Этот случай по свойствам эквивалентен случаю математического маятника. Корнями уравнения (1), а следовательно, и абсциссами точек экстремумов графика $\Pi(\varphi)$ (рис. 2а), будут значения $-\pi$, 0 и π .

Причем, $\varphi = 0$ – минимум потенциальной энергии. Значит, в этом положении механизм имеет положение устойчивого равновесия.

На фазовом портрете [7] (рис. 1б) в точке $\varphi = 0$ имеем особую точку типа «центр». А в точках $\varphi = -\pi$ и $\varphi = \pi$ имеем особые точки типа «седло».

Случай 1. $l_3 = 0,008$ м. Решение уравнения (1) мало отличается от решения предыдущего случая, так же как и график Π и фазовый портрет (рис. 3).

Случай 2. $l_3 = 0,1$ м. В этом случае имеем дополнительные решения уравнения (1), что на графике функции Π дает два дополнительных минимума и максимума (рис. 4а). На фазовом портрете (рис. 4б) имеем дополнительно два центра и два седла. Процесс появления новых особых точек на фазовом портрете называется бифуркацией.

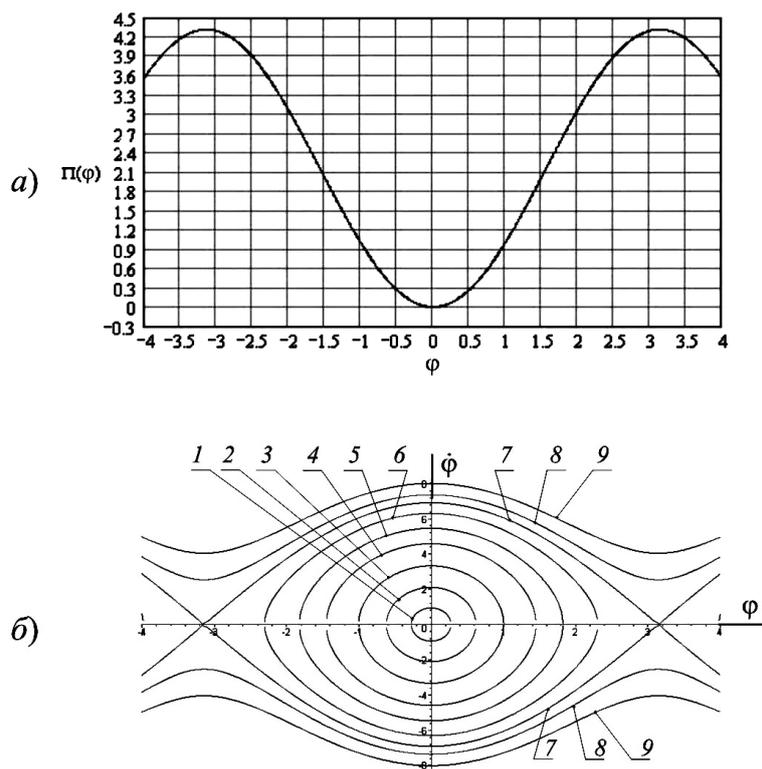


Рис. 2. График потенциальной энергии (а) и фазовый портрет (б) для случая 0 ($l_3 = 0$)

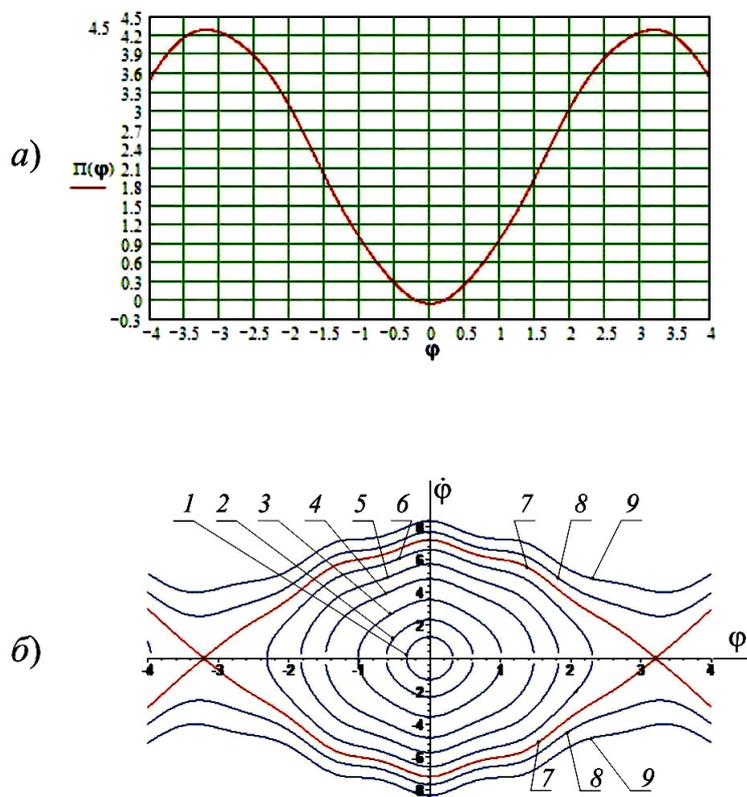


Рис. 3. График потенциальной энергии (а) и фазовый портрет (б) для случая 1 ($l_3 = 0,008$)

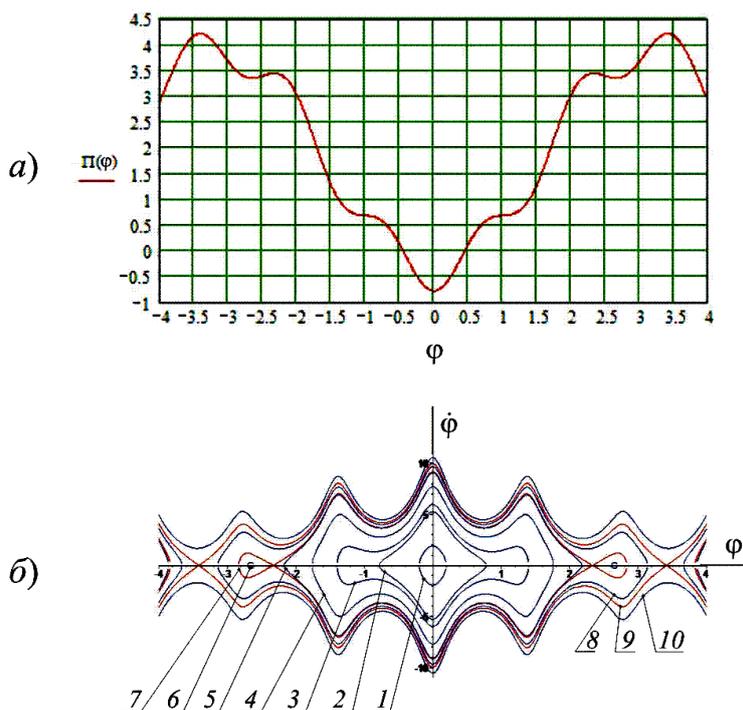


Рис. 4. График потенциальной энергии (а) и фазовый портрет (б) для случая 2 ($l_3 = 0,1$)

Случай 3. $l_3 = 0,2$ м. В этом случае появились еще два дополнительных минимума и максимума у потенциальной энергии. На фазовом портрете (рис. 5б) это добавляет еще два центра и два седла. Наблюдаем вторую бифуркацию.

Вариант II. Угол $\alpha = 0$.

Изменения в случаях 0, 1 и 2 варианта I незначительны. Та же ситуация имеет место и в аналогичных случаях рассматриваемого варианта II. Поэтому эти случаи в данном варианте не приводятся. В случае 3, когда $l_3 = 0,07$ м, происходит превращение устойчивого положения равновесия $\varphi = 0$ в положение неустойчивого равновесия. При этом появляются два симметричных устойчивых положения равновесия вблизи $\varphi = 0$. Эта бифуркация качественно отличается от бифуркации в предыдущем варианте. Далее, с увеличением l_3 добавляются по две пары устойчивого и неустойчивого положений равновесия, т.е. наблюдаются следующие бифуркации.

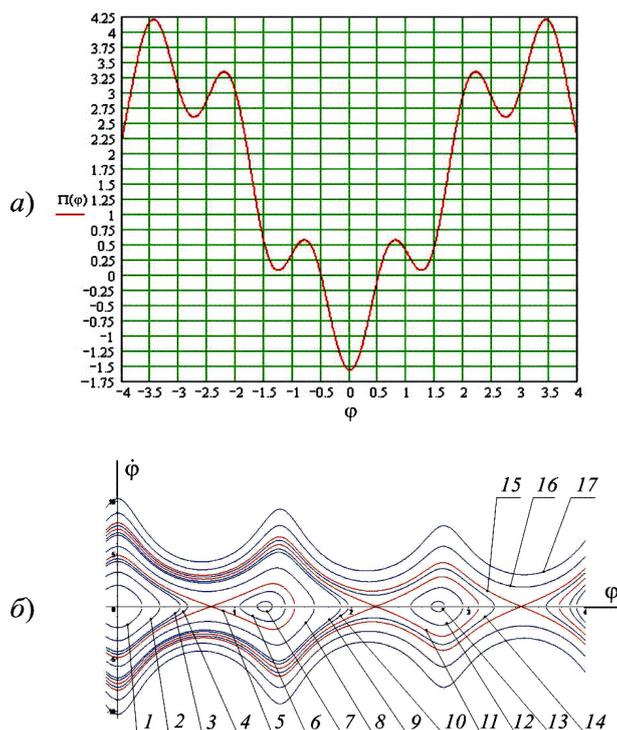


Рис. 5. График потенциальной энергии (а) и фазовый портрет (б) для случая 3 ($l_3 = 0,2$)

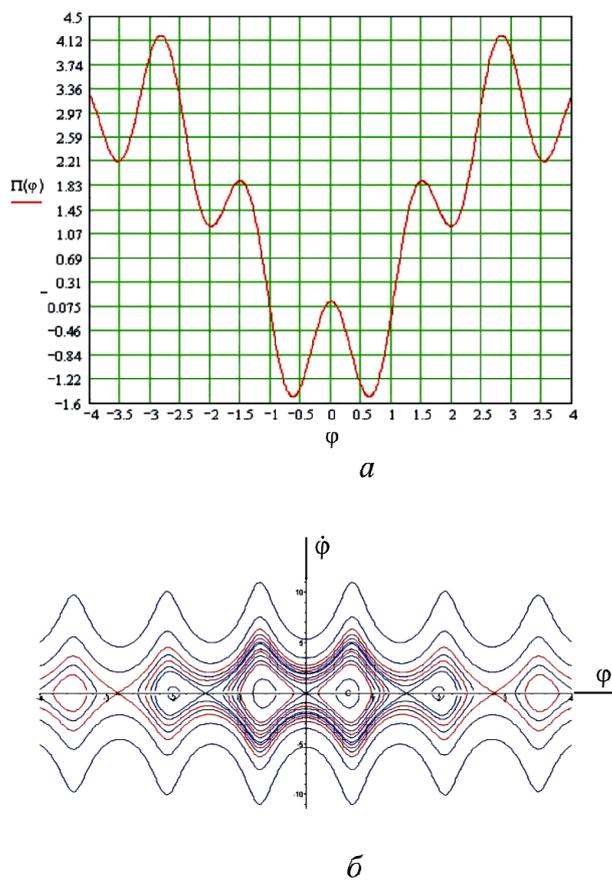


Рис. 6. График потенциальной энергии (а) и фазовый портрет (б) для варианта II в случае 3 ($l_3 = 0,07$)

Выводы

1. Все исследования проводились с помощью графических экспериментов (решение трансцендентного уравнения (1), построение графиков потенциальной энергии, построение фазовых портретов). При этом не использовались методы математического анализа.
2. Один и тот же механизм при разных значениях параметров (в нашем случае l_3) ведет себя по-разному.
3. При разных значениях угла α типы бифуркаций могут отличаться.

Список литературы

1. Крайнев, А.Ф. Словарь-справочник по механизмам / А.Ф. Крайнев. – М.: Машиностроение, 1987. – 560 с.
2. Алюков, С.В. Нелинейные колебания инерционных бесступенчатых передач без механизмов свободного хода / С.В. Алюков // Информатика и кибернетика. – 2012. – № 3. – С. 35–42.
3. Бабаков, И.М. Теория колебаний / И.М. Бабаков. – М.: Дрофа, 2004. – 591 с.
4. Алдошин, Г.Т. Теория линейных и нелинейных колебаний / Г.Т. Алдошин. – СПб.: Лань, 2013. – 320 с.
5. Стрелков, С.П. Введение в теорию колебаний / С.П. Стрелков. – М.: УРСС; ЛЕНАНД, 2017. – 440 с.
6. Бидерман, В.Л. Теория механических колебаний: учебник для вузов / В.Л. Бидерман. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.
7. Андронов, А.А. Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
8. Арнольд, В.И. Математические методы классической механики / В.И. Арнольд. – М.: Эдиториал УРСС, 2000. – 408 с.
9. Бондаренко, Н.И. Сравнительный анализ числа положений устойчивого равновесия механизма при численном изменении его

характерного параметра / Н.И. Бондаренко, К.Б. Обносков, А.В. Паншина // *Естественные и технические науки*. – 2015. – № 10(88). – С. 18–22.

10. Бондаренко, Н.И. Определение и сравнение некоторых характеристик линейных и нелинейных колебаний на примере конкретного механизма с одной степенью свободы / Н.И. Бондаренко, К.Б. Обносков, А.В. Паншина // *Успехи современной науки*. – 2017. – Т. 7, № 3. – С. 78–82.

References

1. Krajnev A.F. *Slovar'-spravochnik po mekhanizmatam* (Dictionary-handbook of mechanisms), Moscow, Mashinostroenie, 1987, 560 p.
2. Alyukov S.V. *Informatika i kibernetika*, 2012, no. 3, pp. 35–42.
3. Babakov I.M. *Teoriya kolebanij* (Theory of oscillations), Moscow, Drofa, 2004, 591 p.
4. Aldoshin G.T. *Teoriya linejnyh i nelinejnyh kolebanij* (Theory of linear and nonlinear oscillations), Saint-Petersburg, Lan', 2013, 320 p.
5. Strelkov S.P. *Vvedenie v teoriyu kolebanij* (Introduction to the theory of oscillations), Moscow, URSS, LENAND, 2017, 440 p.
6. Biderman V.L. *Teoriya mekhanicheskikh kolebanij* (Theory of mechanical oscillations), Moscow, Vysshaya shkola, 1980, 408 p.
7. Andronov A.A., Vitt A.A., Hajkin S.Eh. *Teoriya kolebanij* (Theory of oscillations), Moscow, Nauka, 1981, 568 p.
8. Arnol'd V.I. *Matematicheskie metody klassicheskoj mekhaniki* (Mathematical methods of classical mechanics), Moscow, EHditorial URSS, 2000, 408 p.
9. Bondarenko N.I., Obnosov K.B., Panshina A.V. *Estestvennye i tekhnicheskie nauki*, 2015, no. 10 (88), pp. 18–22.
10. Bondarenko N.I., Obnosov K.B., Panshina A.V. *Uspekhi sovremennoj nauki*, 2017, vol. 7, no. 3, pp. 78–82.