

УДК 629.3.016:531

**Демидова Наталья Серафимовна**, канд. физ.-мат. наук, доц.,  
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, natademi@yandex.ru

## **СРАВНЕНИЕ ТРЕНИЯ ПРИ КАЧЕНИИ И ТРЕНИЯ ПРИ СКОЛЬЖЕНИИ КОЛЕСА В ЛЕКЦИЯХ ПО МЕХАНИКЕ**

**Аннотация.** В данной работе рассматривается вопрос о величинах сил трения, называемых силами сцепления, действующих на ведомые и ведущие колеса при движении автомобиля. Рассматриваются разные режимы движения, при которых силы сцепления имеют как максимальные значения, соответствующие проскальзыванию колес, так и минимальные значения. Приводятся расчетные формулы для определения и сравнения этих значений. Также рассматривается качение колес тележки. Приведены оценки сил сцепления, показывающие, во сколько раз перевозить груз в тележке легче при хорошем состоянии полотна дороги, чем тащить груз волоком.

**Ключевые слова:** колесо, автомобиль, качение, скольжение, силы сцепления, момент качения.

**Demidova Natal'ja S.**, Ph. D., associate professor,  
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, natademi@yandex.ru

## **COMPARISON OF WHEEL ROLLING FRICTION AND WHEEL SLIPPING FRICTION IN MECHANIC LECTURES**

**Abstract.** The question about values of friction forces affecting the driving and driven automobile wheels is considered in this article. These forces are usually named forces of road grip. Different movement regimes are considered corresponding as maximum friction values when there is slipping wheels and also minimal friction values. The calculation expressions are derived to define and compare these values. Also wheel rolling of a car is in consideration. Road grip forces estimations are done to show how many times load carrying with the help of a car is easier than to drag this load.

**Key words:** wheel, automobile, rolling, slipping, road grip forces, rolling moment.

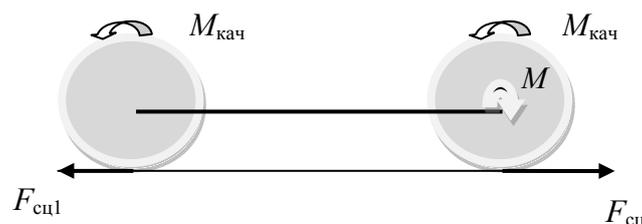
### **Введение**

Как известно, при качении сила трения колеса приложена к неподвижной в данный момент точке. В лекциях по механике для студентов второго курса объясняется, что такая сила трения,

называемая силой сцепления, является силой трения покоя и может быть во много раз меньше силы трения скольжения. Для повышения мотивации студентов к изучению предмета необходимо использовать в лекциях примеры из реальной жизни и техники. Сравнение величин сил трения при качении и при скольжении колес покажем на двух примерах: для колесной пары автомобиля и для тележки, на которую действует внешняя сила.

### **Сравнение сил сцепления и сил трения скольжения колес автомобиля**

На рис. 1 изображена колесная пара самоходной установки.



*Рис. 1*

Правое колесо является ведущим, и к его оси приложен вращающий момент  $M$ . Другие приложенные силы:  $F_{сц}$ ,  $F_{сц1}$  – силы сцепления, то есть силы трения покоя для ведущего и ведомого колес;  $M_{кач}$  – момент трения качения. Справедливы следующие уравнения для движения колесной пары [1]:

$$M - F_{сц}r - M_{кач} = m\rho^2 \frac{a_C}{r}, \quad (1)$$

$$F_{сц} - F_{сц1} = 2ma_C, \quad (2)$$

$$F_{сц1}r - M_{кач} = m\rho^2 \frac{a_C}{r}. \quad (3)$$

Здесь, кроме уже указанных обозначений,  $m$ ,  $a_C$ ,  $r$ ,  $\rho$  – это масса, ускорение центра масс, радиус и радиус инерции каждого колеса.

В системе уравнений (1)–(3) неизвестными являются  $F_{\text{цн}}, F_{\text{цн1}}, a_C$ . Так как силы сцепления являются, как было уже отмечено, силами трения покоя, то справедливы соотношения  $F_{\text{цн}} \leq fN, F_{\text{цн1}} \leq fN$ . Здесь  $f$  – коэффициент трения скольжения между колесом и поверхностью дороги,  $N$  – сила реакции, действующая на колесо со стороны дороги и равная половине веса автомобиля, приходящегося на каждое колесо. Таким образом, уравнения (1)–(3) соответствуют качению колес без проскальзывания.

Решения уравнений имеют вид:

$$a_C = \frac{1}{r} \frac{M - 2M_{\text{кач}}}{2m(1 + \frac{\rho^2}{r^2})}; \quad (4)$$

$$F_{\text{цн1}} = \frac{1}{r(1 + \frac{\rho^2}{r^2})} (M_{\text{кач}} + \frac{\rho^2 M}{2r^2}); \quad (5)$$

$$F_{\text{цн}} = \frac{1}{r(1 + \frac{\rho^2}{r^2})} (-M_{\text{кач}} + M(1 + \frac{\rho^2}{2r^2})). \quad (6)$$

Так как вращающий момент заведомо больше, чем момент качения, то  $M \gg M_{\text{кач}}$ , то  $F_{\text{цн}} - F_{\text{цн1}} = \frac{r}{(r^2 + \rho^2)} (M - 2M_{\text{кач}}) > 0$ . Следовательно, предельное значение, равное  $fN$ , сила сцепления достигает в ведущем колесе, когда колесо движется на грани проскальзывания. Максимальное значение вращающего момента при этом получается подстановкой вместо  $F_{\text{цн}}$  в (6) значения силы трения скольжения  $fN$ :

$$M_{\text{max}} = (fNr(1 + \frac{\rho^2}{r^2}) + M_{\text{кач}}) \frac{2r^2}{2r^2 + \rho^2}.$$

При  $M \geq M_{\text{max}}$  ведущее колесо буксует, ускорение автомобиля при этом имеет предельное максимальное значение, определяемое

из соотношения (4) для  $a_C$ , при подстановке туда значения  $M_{\max}$ .

Следовательно,  $F_{\text{сц1}}$  остается меньше силы трения скольжения  $fN$ ,

и ведомое колесо не проскальзывает.

Также можно получить значения  $F_{\text{сц}}$  и  $F_{\text{сц1}}$  при равномерном качении колес. При  $a_C = 0$  из (2) следует  $F_{\text{сц}} = F_{\text{сц1}}$  и из (4) следует, что вращающий момент  $M = 2M_{\text{кач}}$ . Значения сил сцепления можно получить из соотношений (5) и (6):

$$F_{\text{сц}} = F_{\text{сц1}} = \frac{M_{\text{кач}}}{r}. \quad (7)$$

Приведем некоторые значения вращающего момента  $M$ , момента качения  $M_{\text{кач}}$  и коэффициента трения  $f$  для реальных автомобилей.

Момент качения, действующий на колесо, определяется по формуле  $M_{\text{кач}} = f_{\text{кач}} r N$ .  $N$  – нормальная реакция опоры, равная суммарному весу колеса и весу автомобиля, приходящемуся на одно колесо,  $r$  – радиус колеса. Здесь предполагается, что  $N$  – одна и та же для обоих колес.

Коэффициент сопротивления качению (коэффициент качения)  $f_{\text{кач}}$  зависит от конструкции шины, от дороги и также от скорости автомобиля. Для небольших скоростей (<100 км/ч) коэффициент качения имеет значение для асфальта от 0.008 до 0.030, а для грунтового покрытия от 0.025 до 0.035 [2]. Большие значения относятся к худшему качеству дороги.

Коэффициент трения скольжения  $f$ , который называется коэффициентом сцепления колеса с дорогой, зависит от материала и конструкции шины, от материала и состояния дороги и от скорости автомобиля. Примерные значения коэффициента сцепления следующие: для сухого асфальта – до 0.75, для сухого грунта – до 0.5 [2].

Также приведем характерные значения для вращающего момента, приложенного к ведущему колесу. Вращающий момент  $M$  связан

с мощностью автомобиля  $P$  соотношением  $P = M\omega$ . Здесь  $\omega$  – угловая скорость вращения колеса, то есть предполагается, что коэффициент трансмиссии равен 1.

При следующих характеристиках автомобиля: масса 1000 кг, мощность 150 л.с., радиус колеса 0.5 м, скорость 25 м/с – получаем

$$\omega = V / r = 50 \text{ с}^{-1} \text{ вращающий момент } M = \frac{P}{\omega} = \frac{150 \cdot 750}{50} = 2250 \text{ Нм,}$$

$$M_{\text{кач}} = f_{\text{кач}} rN \approx 0.03 \cdot 1000 \cdot 9.8 \cdot 0.5 / 2 \approx 75 \text{ Нм.}$$

Для коэффициента качения здесь взято значение 0.03,  $N$  равно половине веса автомобиля.

Подставляя приведенные значения для момента качения в соотношение (7), получим величины для сил сцепления колес при равномерном движении автомобиля:

$$F_{\text{сц}} = F_{\text{сц1}} = \frac{f_{\text{кач}} rN}{r} = f_{\text{кач}} N.$$

Так как при проскальзывании сила сцепления имеет максимальное значение, равное силе трения скольжения  $F_{\text{сц}} = F_{\text{ск}} = fN$ , то из сравнения коэффициентов находим, что минимальная сила сцепления меньше силы трения скольжения при одинаковом дорожном покрытии примерно в 25–50 раз.

### **Сравнение сил сцепления и сил трения скольжения колес тележки**

Рассмотрим теперь качение колес тележки под действием приложенной силы. Соответствующая расчетная схема изображена на рис. 2. В отличие от колесной пары автомобиля тележка приводится в движение внешней силой  $F$ , с которой тянут тележку. Приведенные ниже расчеты позволяют оценить экономию затраченных сил при перевозке грузов в тележке по сравнению с каким-либо другим способом их перевозки.

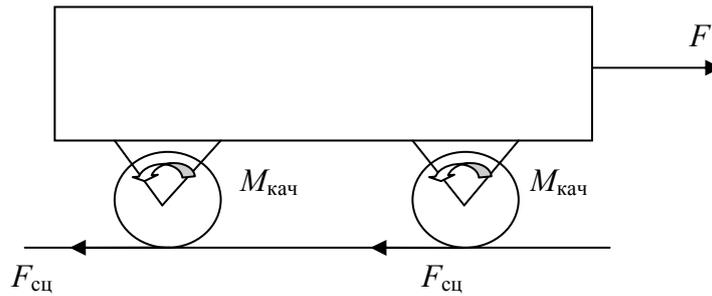


Рис. 2

На рис. 2 приведены следующие обозначения:  $F$  – сила, с которой тянут тележку;  $F_{\text{сц}}$ ,  $M_{\text{кач}}$  – сила сцепления и момент трения качения, приложенные к каждому колесу.

Запишем следующие уравнения для описания движения тележки (число колес равно 2), если колеса катятся без проскальзывания:

$$F - 2F_{\text{сц}} = (m_1 + 2m_2)a, \quad (8)$$

$$m_2 \rho^2 \frac{a}{r} = F_{\text{сц}} r - M_{\text{кач}}. \quad (9)$$

Здесь  $a$ ,  $m_1$ ,  $m_2$ ,  $r$ ,  $\rho$  – это ускорение тележки, масса кузова, масса, радиус и радиус инерции каждого колеса.

Решая систему (8)–(9), находим выражения для ускорения тележки и силы сцепления:

$$a = \frac{\frac{F}{2} - \frac{M_{\text{кач}}}{r}}{\frac{m_1}{2} + m_2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)}, \quad (10)$$

$$F_{\text{сц}} = \frac{m_2 \frac{F \rho^2}{2r^2} + (m_1 + 2m_2) \frac{M_{\text{кач}}}{2r}}{\frac{1}{2} m_1 + m_2 \left(1 + \frac{\rho^2}{r^2}\right)}. \quad (11)$$

Для равномерного качения тележки, полагая  $a = 0$ , находим, что сила, с которой тянут тележку, в этом случае имеет наименьшее значение

$$F = \frac{2M_{\text{кач}}}{r}, \quad \text{а} \quad F_{\text{сц}} = \frac{M_{\text{кач}}}{r}.$$

Из уравнения (9) также можно найти предельное ускорение тележки  $a_{\text{пред}}$ , при котором колеса катятся на грани проскальзывания

(при этом следует положить  $F_{\text{сц}} = f \frac{m_1 + 2m_2}{2} g$ ):

$$a_{\text{пред}} = \frac{f \frac{m_1 + 2m_2}{2} gr^2 - M_{\text{кач}} r}{m_2 \rho^2}.$$

Этому ускорению соответствует предельная сила, приложенная к тележке  $F = F_{\text{пред}}$ .

Если сила  $F > F_{\text{пред}}$ , то колеса тележки проскальзывают вперед (то есть двигаются юзом), и уравнения (8)–(9) нельзя решать совместно, так как угловое ускорение колес  $\varepsilon < \frac{a}{r}$  и вместо уравнения (9) надо решать

уравнение  $m_2 \rho^2 \varepsilon = f \frac{m_1 + 2m_2}{2} r - M_{\text{кач}}$ .

В уравнении (8) для определения ускорения также следует положить  $F_{\text{сц}} = f \frac{m_1 + 2m_2}{2} g$ . Таким образом, вращение колес не успевает за ускорением осей.

Приведем некоторые численные значения. Пусть масса тележки  $m_1 + 2m_2 = 20$  кг, сила, приложенная к тележке  $F = 200$  Н. Пусть тележка катится по асфальту или по укатанному грунту с коэффициентом качения  $f_{\text{кач}} = 0.03$  и коэффициентом скольжения  $f = 0.75$  (коэффициенты трения скольжения и качения для этих поверхностей приведены выше). Тогда в случае равномерного качения тележки получим:

$$F = \frac{2M_{\text{кач}}}{r} = \frac{2f_{\text{кач}} r N}{r} = f_{\text{кач}} m_1 g; \quad F_{\text{сц}} = \frac{1}{2} f_{\text{кач}} m_1 g.$$

Сила трения скольжения  $F_{\text{ск}} = \frac{1}{2} f m_1 g$ .

Подставляя соответствующие значения, получаем, что для равномерного движения сила, с которой тянут тележку, равна 6 Н, сила сцепления колеса с дорогой – 3 Н, а для сравнения сила трения скольжения на одно колесо – 75 Н.

Если же тележка катится по рыхлому грунту, то коэффициент качения увеличивается. Качение колеса по мягкому грунту вызывает уплотнение частиц грунта под колесом и смещение его в сторону и по направлению движения. От типа и состояния грунта зависит коэффициент сопротивления грунта сжатию  $C_r$  на глубине 1 см от поверхности. Коэффициент качения зависит от  $C_r$  по формуле

$$f = \frac{0.12}{C_r} + 0.05 \text{ [2]}. \text{ Так, для песчаного грунта } 0.15 < C_r < 0.5$$

и соответственно коэффициент качения  $0.85 > f > 0.3$ . В этом случае сила трения сцепления сравнима по величине с силой трения скольжения, и в этих условиях сила, приложенная к тележке, примерно равна 150 Н. Таким образом, для рыхлого грунта использование тележки для перевозки груза практически не дает выигрыша по сравнению с перетаскиванием груза волоком.

### **Заключение**

Эти задачи полезно использовать в лекциях по динамике движения колеса автомобиля, их результаты очень наглядно показывают, во сколько раз меньше может быть сила трения покоя, называемая силой сцепления, по сравнению со своим предельным значением – силой трения скольжения.

### **Список литературы**

1. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике / И.В. Мещерский. – М.: Наука, 1976. – 415 с.
2. Хусаинов, А.Ш. Теория автомобилей: конспект лекций / А.Ш. Хусаинов, В.В. Селифонов. – Ульяновск: Изд-во УлГТУ, 2008. – 121 с.

### **References**

1. Mescherskij I.V. *Sbornik zadach po teoreticheskoj mehanike* (Problem exercises for theoretical mechanics), Moscow, Nauka, 1978, 415 p.
2. Husainov A.Sh., Selifonov V.V. *Teorija avtomobilej. Konspekt lekcij.* (Automobiles theory. Lectures conspect), Ulyanovsk, UIGTU, 2008, 121 p.