УДК 537.87

Портнов Юрий Алексеевич, канд. физ.-мат. наук, доц.,
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, portnovyura@yandex.ru
Леготин Сергей Дмитриевич, канд. техн. наук, доц.,
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, legotin.msiu@gmail.com

РАЗНОСТЬ ФАЗ МЕЖДУ МАГНИТНОЙ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ СОСТАВЛЯЮЩИМИ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЕ

Аннотация. В статье продемонстрировано несостоятельность тех логических выводов, из которых будто бы следует равенство начальных фаз электрической и магнитной составляющих в электромагнитной волне, что приводится в большинстве учебников по данной тематике. В качестве альтернативы приводятся иные непротиворечивые доказательства о равенстве начальных фаз. Статья может оказаться полезной преподавателям не только высших учебных заведений, но и средних учебных заведений технического профиля – техникумов, колледжей, училищ, а также учащимся с разным уровнем математической подготовки.

Ключевые слова: электромагнитная волна, разность фаз, электрическая составляющая, магнитная составляющая.

Portnov Yuriy A., Ph. D., associate professor,
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, portnovyura@yandex.ru
Legotin Sergey D., Ph. D., associate professor,
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, legotin.msiu@gmail.com

DIFFERENCE OF PHASE BETWEEN THE MAGNETIC AND ELECTRICAL COMPONENT IN THE ELECTROMAGNETIC WAVE

Abstract. The article demonstrates the inadequacy of those logical conclusions from which it would seem that the initial phases of the electric and magnetic components in the electromagnetic wave are equal, as is shown in most textbooks on this topic. As an alternative, several other inconsistent proofs of the equality of the initial phases are given. The article can be useful not only to teachers of higher educational institutions, but also secondary technical schools – technical schools, colleges, schools, as well as for students with different levels of mathematical training.

Key words: electromagnetic wave, phase difference, electrical component, magnetic component.

При описании вывода уравнений плоских электромагнитных волн в учебниках и справочниках, как правило, вопрос о разности фаз между электрическими и магнитными составляющими волн остается за рамками обсуждения [1]–[6] либо обосновывается неточными утверждениями [7]–[10]. Целью данной работы является демонстрация логически непротиворечивого подхода, обосновывающего равенство фаз электрической и магнитной составляющих у электромагнитной волны.

Рассмотрим классический вывод уравнения электромагнитной волны. Пусть электромагнитная волна распространяется в вакууме $\rho = 0$, $j = 0$, $\varepsilon = \mu = 1$ вдоль оси x, в этом случае магнитная и электрическая составляющие будут зависеть только от времени и координаты x. Запишем уравнения Максвелла в виде проекций на ортогональные
к x оси y и z:

$$\begin{gathered} 0 = \mu_0 \frac{\partial H_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \end{gathered} \tag{1}$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

$$\begin{gathered} 0 = \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}, \end{gathered} \tag{3}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0. \tag{4}$$

Первое из уравнений (3) и уравнение (4) показывают, что E_x не зависит ни от времени, ни от координаты x. Такой же вывод дает первое уравнение из (1) и уравнение (2), H_x не зависит ни от времени, ни от координаты x. Следовательно, поле волны не имеет составляющих вдоль оси x, откуда векторы $\vec{E}$ и $\vec{H}$ ортогональны оси x.

Оставшиеся четыре уравнения позволяют записать уравнения волны:

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial H_y}{\partial t}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\mu_0 \frac{\partial H_z}{\partial t}, \tag{6}$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}. \tag{8}$$

Предположим, что существует переменное электрическое поле E_y, направленное вдоль оси y. Согласно (7) это поле создает направленное вдоль оси z переменное магнитное поле H_z. В соответствии с уравнением (6) переменное магнитное поле вызывает наличие переменного электрического поля E_y, направленного вдоль оси y и т.д. При этом не возникает ни поле E_z, ни поле H_y, а значит в уравнениях (5) и (8) будут присутствовать тождественные нули.

Продифференцируем по x уравнение (6):

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial E_y}{\partial x} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial H_z}{\partial t},$$

вследствие независимости порядка дифференцирования и уравнения (7) можно записать:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \tag{9}$$

Повторяя аналогичные рассуждения применительно к уравнению (7), получим:

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}. \tag{10}$$

Уравнения (9) и (10) представляют волновые уравнения, при этом коэффициент в правой части уравнений определяет скорость волны:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}. \tag{11}$$

Решением уравнения (9) будет функция:

$$E_y = E_{\max} \cos(\omega t - kx + \alpha_1), \tag{12}$$

а решением уравнения (10) будет:

$$H_z = H_{\max} \cos(\omega t - kx + \alpha_2), \tag{13}$$

где ω – циклическая частота, k – волновое число. И далее, в ряде учебников [1]–[6] постулируется, что начальные фазы α_1 и α_2 равны, что, вообще говоря, формально не следует из уравнений (12) и (13).

Сделаем еще один шаг, подставляя полученные решения (12) и (13) в уравнения Максвелла (6) и (7), что приводит к системе уравнений:

$$kE_{\max} \sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0 \omega H_{\max} \sin(\omega t - kx + \alpha_2), \tag{14}$$

$$kH_{\max} \sin(\omega t - kx + \alpha_2) = \varepsilon_0 \omega E_{\max} \sin(\omega t - kx + \alpha_1). \tag{15}$$

После записи этой системы в других учебниках [7]–[10] следует вывод, что для того чтобы система уравнений удовлетворялась, необходимо равенство начальных фаз α_1 и α_2. Однако корректность этого утверждения в записи (14) и (15) не следует из самих уравнений.

Покажем, как можно корректно доказать равенство начальных фаз α_1 и α_2, основываясь на решении уравнений Максвелла в области комплексных чисел.

Так, решение уравнений (9) и (10) в области комплексных чисел имеет вид:

$$E_y = E_{\max} \exp(-i(\omega t - kx + \alpha_1)), \tag{16}$$

$$H_z = H_{\max} \exp(-i(\omega t - kx + \alpha_2)), \tag{17}$$

где ω – циклическая частота, k – волновое число. Подстановка полученных решений (16) и (17) в уравнения Максвелла (6) и (7) приводит к системе уравнений:

$$ikE_{\max}\exp(-i(\omega t - kx + \alpha_1)) = i\mu_0\omega H_{\max}\exp(-i(\omega t - kx + \alpha_2)),$$

$$ikH_{\max}\exp(-i(\omega t - kx + \alpha_2)) = i\varepsilon_0\omega E_{\max}\exp(-i(\omega t - kx + \alpha_1)).$$

После упрощения этой системы уравнений получаем:

$$kE_{\max}\exp(-i\alpha_1) = \mu_0\omega H_{\max}\exp(-i\alpha_2), \quad (18)$$

$$kH_{\max}\exp(-i\alpha_2) = \varepsilon_0\omega E_{\max}\exp(-i\alpha_1).. \quad (19)$$

И если теперь взять, например, уравнение (18), то можно показать, что:

$$\exp(i(\alpha_2 - \alpha_1)) = \frac{\mu_0\omega H_{\max}}{kE_{\max}}$$

или, если воспользоваться формулой Эйлера:

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) + i\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\mu_0\omega H_{\max}}{kE_{\max}}.$$

Обратим внимание, что в правой части уравнения стоит действительное положительное число, следовательно, в левой части уравнения тоже должно быть действительное положительное число, а это возможно, если:

$$\sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$$

$$\cos(\alpha_2 - \alpha_1) > 0.$$

Значит, решением этих уравнений является:

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 2m\pi,$$

где $m \in \mathbb{Z}$ – является любым целым числом.

Следовательно, между начальными фазами электрической и магнитной составляющих должно выполняться равенство:

$$\alpha_2 = \alpha_1 + 2m\pi. \quad (20)$$

Аналогично преобразовывая (19), получаем:

$$\alpha_1 = \alpha_2 + 2n\pi, \quad (21)$$

где $n \in \mathbb{Z}$ – целое число и, как следует из (20) и (21), $n = -m$. Следовательно, одним из решений будет равенство начальных фаз электрической и магнитной составляющих $\alpha_2 = \alpha_1$.

Покажем, как можно доказать равенство фаз в области действительных чисел. Перепишем, например, уравнение (14) в виде:

$$kE_{\max}\sin(\omega t - kx + \alpha_1) = \mu_0\omega H_{\max}\sin(\omega t - kx + \alpha_1 + \Delta\alpha), \qquad (22)$$

где $\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$. Преобразуем (22):

$$\frac{kE_{\max}}{\mu_0\omega H_{\max}} = \frac{\sin(\omega t - kx + \alpha_1 + \Delta\alpha)}{\sin(\omega t - kx + \alpha_1)}.$$

Если воспользоваться тригонометрическими тождествами, то из правой части получим:

$$\frac{\sin(\omega t - kx + \alpha_1 + \Delta\alpha)}{\sin(\omega t - kx + \alpha_1)} = \frac{\sin(\omega t - kx + \alpha_1)\cdot\cos\Delta\alpha + \cos(\omega t - kx + \alpha_1)\cdot\sin\Delta\alpha}{\sin(\omega t - kx + \alpha_1)} =$$
$$= \cos\Delta\alpha + \sin\Delta\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\omega t - kx + \alpha_1),$$

или окончательно:

$$\frac{kE_{\max}}{\mu_0\omega H_{\max}} = \cos\Delta\alpha + \sin\Delta\alpha\cdot\mathrm{ctg}(\omega t - kx + \alpha_1). \qquad (23)$$

Учитывая, что слева – положительная константа, а стоящая в правой части тригонометрическая функция меняется от времени и выбранной координаты, решение (23) существует только при условии, когда: $\sin\Delta\alpha = 0;\ \cos\Delta\alpha = 1,$ т.е. $\Delta\alpha = 2n\pi,$ что совпадает с предыдущим выводом.

Таким образом, из продемонстрированных выводов равенство начальных фаз получается как при нахождении решения уравнений Максвелла в комплексном виде, так и в области действительных чисел.

Список литературы

1. Мякишев, Г.Я. Физика: учебник 11 класса / Г.Я. Мякишев, Б.Б. Буховцев. – М.: Просвещение, 2005. – 382 с.

2. Генденштейн, Л.Э. Физика. 11 класс. В 2 ч. Ч. 1 / Л.Э. Генденштейн, Ю.И. Дик. – 2-е изд. – М.: Мнемозина, 2010. – 272 с.

3. Элементарная физика: справочник / Н.И. Кошкин [и др.]. – М.: Столетие, 1996. – 304 с.

4. Основы физики. В 2 т. Т. 2. / Б.М. Яворский [и др.]. – М.: Физматлит, 2000. – 576 с.

5. Геворкян, Р. Г. Курс физики: учеб. пособие / Р.Г. Геворкян. – М.: Высш. школа, 1979. – 656 с.

6. Калашников, Э.Г. Электричество / Э.Г. Калашников. – М.: Наука, 1977. – 620 с.

7. Фриш, С.Э. Курс общей физики. В 3 т. Т.2 / С.Э. Фриш, А.В. Тиморева. – М.: Физматлит, 1962. – 516 с.

8. Савельев, И.В., Курс общей физики. В 3 т. Т.2 / И.В. Савельев. – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1982. – 496 с.

9. Калашников, Н.П. Основы физики. В 2 т. Т.2 / Н.П. Калашников, М.А. Смондырев. – М.: Лаборатория знаний, 2017. – 606 с.

10. Сивухин, Д.В. Общий курс физики. В 3 т. Т.3 / Д.В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 688 с.

References

1. Myakishev G.Y., Buhovcev B.B. *Fizika 11 klass* (Physics grade 11), Moscow, Prosvyashenie, 2005, 382 p.

2. Gendenshteyn L.E., Dik Ju.I. *Fizika 11 klass* (Physics grade 11), Moscow, Mnemozina, 2010, 272 p.

3. Koshkin N.I. *Elementarnaya fizika* (Elementary physics), Moscow, Stoletie, 1996, 304 p.

4. Yavorskiy B.M. *Osnovi fiziki* (Fundamentals of physics), Moscow, Fiziko-matematicheskaya litertura, 2000, 576 p.

5. Gevorkyan R.G. *Kurs fiziki* (Physics course), Moscow, Visshaya shkola, 1979, 656 p.

6. Kalashnikov E.G. *Elektrichestvo* (Electricity), Moscow, Nauka, 1977, 620 p.

7. Frish S.E., Timoreva A.V. *Kurs obshey fiziki* (The General physics course), Moscow, 1962, 516 p.

8. Savelev I.V. *Kurs obshey fiziki* (The General physics course), Moscow, Nauka, 1982, 496 p.

9. Kalashnikov N.P., Smondyrev M.A. *Osnovi fiziki* (Fundamentals of physics), Moscow, Laboratoriya znaniy, 2017, 606 p.

10. Sivuxin D.V. *Obshiy kurs fiziki* (The General physics course), Moscow, Nauka, 1977, 688 p.