УДК 629.025

Наталья Серафимовна Демидова, канд. физ.-мат. наук, доц.,
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, natademi@yandex.ru

ОЦЕНКА ДЕФОРМАЦИИ АВТОМОБИЛЕЙ РАЗНОЙ МАССЫ ПРИ СТОЛКНОВЕНИИ В РАЗДЕЛЕ «УДАР ТЕЛ» В КУРСЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются вопросы оценки деформации автомобилей разной массы при их лобовом столкновении в приближенной постановке задачи для использования в курсе теоретической механики. Упругие свойства автомобилей моделируются деформацией пружин с определенным коэффициентом жесткости. Неупругие ударные взаимодействия характеризуются коэффициентом восстановления. Рассматриваются деформации для первой и второй фазы удара. Сделана оценка, во сколько раз в принятой модели соударения деформации легкого автомобиля больше, чем тяжелого.

Ключевые слова: лобовое столкновение, соударения легкого и тяжелого автомобилей, деформации пружины, деформации автомобилей, первая и вторая фазы удара.

Natalya S. Demidova, Ph. D., associate professor,
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, natademi@yandex.ru

EVALUATION OF DEFORMATION OF CARS OF DIFFERENT MASS IN THE COLLISION IN THE "SHOCK BODIES" IN THE COURSE OF THEORETICAL MECHANICS

Abstract. In this article the problems of evaluation of different mass automobile deformation under direct collisions are considered in approximate model. These results are supposed to use in the course of theoretical mechanics. Elastic characteristics of automobiles are simulated with deformation of the certain rigidity springs. The inelastic collision interactions are characterized by means of recovery coefficient. The deformations are considered for the first and the second collision phases. Conclusion is made how many times lesser mass automobile deformation is more than bigger automobile deformation.

Key words: direct collisions, different mass automobile collisions, deformation of spring, deformations of automobiles, the first and the second collision phases.

Для того чтобы повысить мотивацию студентов и их интерес к изучению естественнонаучных дисциплин, очень важным является умение преподавателя применить научные понятия к конкретным примерам, относящимся к специальности студентов [1]. В курсе теоретической механики рассматривается тема «Удар тел». Данный раздел является примером междисциплинарных связей физики и теоретической механики. Так как слушатели являются студентами факультета автомобильного транспорта, то явление удара было рассмотрено на примере соударения автомобилей. В данной работе, используя законы механики об импульсе и энергии твердых тел, была сделана приближенная оценка такого важного параметра, как соотношение деформаций автомобилей при столкновении. Рассматривается следующая постановка задачи. Два автомобиля разной массы движутся навстречу друг другу с равными по величине скоростями, и затем происходит прямой удар этих автомобилей. Направим ось x по прямой, соединяющей центры масс автомобилей, в сторону движения легкого автомобиля. Легкий автомобиль массы m перед столкновением имеет скорость U_{1x}, а тяжелый автомобиль массы M имеет скорость $V_{1x} = -U_{1x}$ (рис. 1).

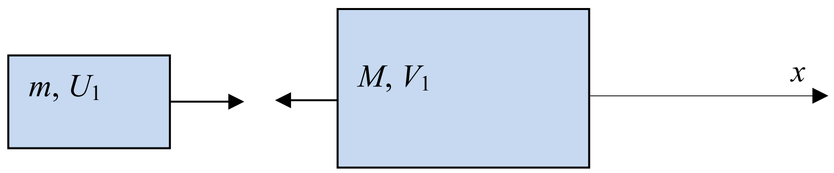

Рис. 1. Скорости тел перед столкновением

После столкновения автомобили приобретают скорости U_{2x} и V_{2x} для легкого и тяжелого автомобилей соответственно, которые определяются из закона сохранения импульса и соотношения для коэффициента восстановления $k = \dfrac{|U_{2x} - V_{2x}|}{|U_{1x} - V_{1x}|}$ [2]:

$$U_{2x} = \frac{(m - kM)U_{1x} + M(1+k)V_{1x}}{M + m};$$
$$V_{2x} = \frac{m(1+k)U_{1x} + (M - km)V_{1x}}{M + m}.$$

Коэффициент восстановления k характеризует степень восстановления нормальной составляющей относительной скорости тел после столкновения к ее значению перед столкновением.

В нашем случае $V_{1x} = -U_{1x}$, и скорости после удара приобретают вид:

$$U_{2x} = \frac{m - M(1+2k)}{M + m}U_{1x},$$
$$V_{2x} = \frac{m(1+2k) - M}{M + m}U_{1x}. \qquad (1)$$

Как известно, потери кинетической энергии системы двух тел при столкновении определяются теоремой Карно [2]:

$$\frac{1}{2}\left[m(U_{2x}^2 - U_{1x}^2) + M(V_{2x}^2 - V_{1x}^2)\right] = -\frac{1-k}{1+k}\left[\frac{1}{2}m(U_{2x} - U_{1x})^2 + \frac{1}{2}M(V_{2x} - V_{1x})^2\right].$$

Для абсолютно упругого удара коэффициент восстановления $k = 1$, и потери кинетической энергии равны нулю. Наибольшие потери энергии происходят при абсолютно неупругом ударе, когда $k = 0$. Потери энергии складываются из изменения кинетической энергии каждого тела в результате соударения. Согласно теореме об изменении кинетической энергии, примененной к каждому телу, это изменение определяется работой упругих сил при деформациях, возникающих при действии другого тела. Таким образом, чем больше изменение кинетической энергии тела, тем большие возникают деформации.

Эти соображения были использованы для оценки деформаций при столкновении двух автомобилей разной массы при лобовом столкновении.

Для простоты и наглядности оценки начальные скорости автомобилей предполагались одинаковыми по величине.

Эта задача в системе центра масс была рассмотрена в [3]. Там было показано, во сколько раз деформация автомобиля с меньшей массой превышает деформацию тяжелого автомобиля при соударении.

Рассмотрим теперь ударное взаимодействие в неподвижной системе отсчета. Как известно, ударное взаимодействие можно разделить на две фазы [2]. Первая фаза длится с момента соприкосновения тел и до максимального сближения при деформации их поверхностей. Вторая фаза – от момента максимального сближения до отделения тел друг от друга. При этом недеформированное состояние полностью или частично восстанавливается. Запишем выражения для ударного импульса на первой и второй фазах удара S_{1x} и S_{2x} (в системе центра масс):

$$S_{1x} = -(U_{1x} - C_x)m = (V_{1x} - C_x)M; \; S_{2x} = (U_{2x} - C_x)m = -(V_{2x} - C_x)M.$$

Отсюда $k = \dfrac{|U_{2x} - V_{2x}|}{|U_{1x} - V_{1x}|} = \dfrac{S_{2x}}{S_{1x}}$.

Это выражение придает коэффициенту k динамическое истолкование. Отсюда следует, что вторая фаза ударного взаимодействия начинается, когда скорости автомобилей сравниваются по величине и направлению и становятся равными скорости центра масс системы тел. В нашем случае при $V_{1x} = -U_{1x}$ $C_x = \dfrac{m-M}{m+M}U_{1x}$. Соотношение для C_x показывает, что скорость центра масс направлена в сторону начальной скорости тяжелого автомобиля. Как следует из (1) при $V_{1x} = -U_{1x}$, если $m < M$ и $U_{1x} > 0$ скорость легкого тела после удара $U_{2x} < 0$. Для тяжелого автомобиля $V_{2x} < 0$, если выполняется более сильное условие $m(1 + 2k) < M$. Таким образом, легкий автомобиль всегда меняет направление движение после удара, в то время как тяжелый автомобиль либо продолжает движение в прежнюю сторону, либо отскакивает после удара в противоположную сторону. Например, при $k = 0,5$ автомобиль с массой $M > 2m$ после удара продолжает движение в прежнем направлении, а для $m < M < 2m$ меняет направление движения. Представим взаимодействие автомобилей в процессе соударения как деформацию пружины, состоящей из двух частей с различными жесткостями C_1 и C_2, концы которой движутся со скоростями центров масс автомобилей [3]. Тогда, как следует из приведенного анализа скоростей, в первой фазе удара пружина сжимается. Во второй фазе удара происходит восстановление пружины, но пружина полностью не восстанавливается из-за потерь кинетической энергии тел. Изменения кинетической энергии тел во второй фазе удара имеют вид [4]:

$$\begin{aligned}\Delta T_1 &= \frac{m}{2}(C_x^2 - U_{2x}^2) = \frac{m}{2}U_{1x}^2\frac{4kM(m - M(1+k))}{(m+M)^2};\\ \Delta T_2 &= \frac{M}{2}(C_x^2 - V_{2x}^2) = \frac{M}{2}U_{1x}^2\frac{4km(M - m(1+k))}{(m+M)^2}.\end{aligned} \quad (2)$$

В соответствии с приведенной выше оценкой скоростей после соударения для легкого автомобиля $\Delta T_1 < 0$, тогда как для тяжелого автомобиля $\Delta T_2 > 0$ при $m(1 + k) < M$ и $\Delta T_2 < 0$ при $m(1 + k) > M$. На второй фазе удара легкий автомобиль увеличивает скорость за счет потенциальной энергии сжатой пружины C_1. Аналогично изменяется кинетическая энергия и для второго автомобиля. Полагая, что $C_1x_1 = C_2x_2$, где x_1 и x_2 – деформации легкого и тяжелого автомобилей во второй фазе удара, получим, используя выражения (2), следующие соотношения из закона сохранения энергии:

$$\frac{C_1x_1^2}{C_2x_2^2} = \frac{|x_1|}{|x_2|} = \frac{|\Delta T_1|}{|\Delta T_2|} = \frac{M(1+k) - m}{|M - m(1+k)|}. \quad (3)$$

Как следует из (3) $|x_1| > |x_2|$ как при $m < M < m(1 + k)$, так и при $m(1 + k) < M$. В результате этой оценки следует, что на второй фазе удара деформации легкого автомобиля больше, чем деформации тяжелого. При

$k = 0$ (абсолютно неупругий удар) вторая фаза удара отсутствует. Скорости тел после соударения одинаковы и равны скорости центра масс, т.е. тела после соударения движутся вместе. При $k = 1$ (абсолютно упругий удар) отношения деформаций имеет максимальную величину. Для $M >> m$:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{2M - m}{M - 2m} \approx 2 + \frac{m}{M} - \frac{m^2}{M^2}. \tag{4}$$

Сравним отношения деформаций автомобилей для абсолютно упругого удара на первой и второй фазах удара. Рассмотрим два этапа первой фазы: на первом этапе скорость легкого автомобиля тормозится до нуля, на втором этапе легкий автомобиль, изменив направление скорости, достигает скорости центра масс. Тяжелый автомобиль на этих этапах, не меняя направления скорости, тормозится до скорости центра масс. Изменение кинетической энергии для легкого автомобиля представляет собой сумму изменений его энергии на первом и втором этапах. Таким образом, нужно применить закон изменения кинетической энергии для легкого автомобиля на каждом этапе.

Изменение кинетической энергии легкого автомобиля на первом этапе $\Delta T_{10} = -\frac{1}{2} m U_{1x}^2$. Уменьшение кинетической энергии от начальной энергии до нуля происходит из-за работы упругой силы, с которой тяжелый автомобиль действует на легкий автомобиль. Моделируя взаимодействие автомобилей в процессе соударения как деформацию пружины, состоящей из двух частей с различными жесткостями C_1 и C_2, необходимо отметить, что упругая сила второго автомобиля действует в точке контакта, перемещение точки равно деформации второго автомобиля на этом этапе, работа этой силы на первом этапе отрицательна и равна по модулю потенциальной энергии второй пружины, которая сжимается. Таким образом, $-\frac{1}{2} m U_{1x}^2 = -\frac{1}{2} C_2 x_{20}^2$, где x_{20} – деформация второй пружины на первом этапе первой фазы соударения. Изменение кинетической энергии первого тела на втором этапе $\Delta T_{11} = \frac{1}{2} m C_x^2$. Первое тело меняет направление движения, и его кинетическая энергия возрастает за счет положительной работы упругой силы второй пружины (так как на втором этапе упругая сила второй пружины действует в направлении скорости первого тела).

$$\frac{1}{2} m C_x^2 = \frac{1}{2} C_2 x_2^2 - \frac{1}{2} C_2 x_{20}^2,$$

где x_2 – деформация второй пружины в конце второго этапа.

Окончательно для энергии легкого автомобиля получаем следующее выражение

$$\frac{1}{2} m (C_x^2 + U_{1x}^2) = \frac{1}{2} C_2 x_2^2. \tag{5}$$

Для тяжелого автомобиля на первой фазе удара скорость, оставаясь постоянной по направлению, уменьшается по величине до скорости центра масс. Уменьшение кинетической энергии происходило за счет отрицательной работы упругой силы деформации легкого автомобиля, действующей против скорости второго автомобиля. Работа этой силы равна потенциальной энергии первого тела со знаком минус.

Таким образом, для тяжелого автомобиля можно написать выражение

$$\frac{1}{2} M (C_x^2 - U_{1x}^2) = -\frac{1}{2} C_1 x_1^2. \tag{6}$$

Используя выражения (5) и (6) для отношения деформаций на первой фазе соударения, получим, принимая во внимание выражение для скорости центра масс C_x:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{M\left(1 - \frac{(m-M)^2}{(m+M)^2}\right)}{m\left(1 + \frac{(m-M)^2}{(m+M)^2}\right)} = \frac{2M^2}{(m^2 + M^2)}. \tag{7}$$

Обе деформации x_1 и x_2 являются деформациями сжатия. Как следует из выражения (7), $x_1 > x_2$ при всех $M > m$. В случае $M >> m$ $\frac{x_1}{x_2} \approx 2 - \frac{m^2}{M^2}$. Это выражение несколько отличается от (4), что можно отнести за счет сложности процесса моделирования деформаций на первой фазе удара.

Таким образом, можно сделать вывод, что, применяя законы механики о сохранении импульса и изменении кинетической энергии для соударения двух тел, получены оценки для отношения деформации автомобилей в зависимости от их массы. Содержание этих законов входит в программу для студентов второго курса по теоретической механике. Результаты этой работы были использованы при чтении лекций и вызывают большой интерес у студентов.

Список литературы

1. Матвеева Е.В., Сазонова З.С., Ищенко В.В. Опыт формирования и оценки профессиональных компетенций студентов вузов в процессе изучения технических дисциплин // Известия Балтийской государственной академии рыбопромыслового флота: психолого-педагогические науки (теория и методика профессионального образования). 2012. № 2 (20). С. 129 – 135.

2. Лойцянский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Т. 2. М.: Дрофа, 2006. 719 с.

3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986. 511 с.

4. Демидова Н.С. Применение законов механики для оценки деформации автомобилей при столкновении // Материалы XIII Международной конференции ФССО-15. Санкт-Петербург, 2015. Т. 2. С. 270 – 272.

References

1. Matveeva E.V., Sazonova Z.S., Ischenko V.V. *Izvestija Baltijskoi gosudarstvennoi academii ribopromislovogo flota:psyhologo-pedagogicheskie nauki (teoria i metodika professionalnogo obrazovania)*, 2012, no. 2 (20), pp. 129 – 135.

2. Lojtsjanskij L.G., Lurje A.I. *Kurs teoreticheskoi mehaniki* (Course of theoretical mechanics), vol. 2, Moscow, Drofa, 2006, 719 p.

3. Feodosjev V.I. *Soprotivlenie materialov* (Resistance of materials), Moscow, Nauka, 1986, 511 p.

4. Demidova N.S. Materialy XIII mezhdunarodnoi konferentsii FSSO-15, Sankt-Peterburg, 2015, vol. 2, pp. 270 – 272.