УДК 62-91

Владимир Александрович Зорин, д-р техн. наук, проф.,
МАДИ, Россия, 125319, Москва, Ленинградский пр., 64, madi-dm@list.ru

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ТЕХНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Аннотация. В статье предложен подход к формированию математического описания процесса изменения состояния технической системы с применением аппарата теории информации и теории катастроф.

Ключевые слова: техническая система, работоспособность, предельное состояние, отказ.

Vladimir A. Zorin, Dr., professor,
MADI, 64, Leningradsky Prosp., Moscow, 125319, Russia, madi-dm@list.ru

MATHEMATICAL ANALYSIS OF VARIATION PROCESS OF CONDITION OF TECHNICAL SYSTEM

Abstract. In article the approach to formation of the mathematical description of process of change of a condition of technical system with application of the theory of the information and the theory of accidents is offered.

Keywords: technical system, working capacity, a limiting condition, refusal.

Введение

Решение целого ряда инженерных задач, связанных с оценкой риска отказа машины, прогнозированием необходимости проведения управляющих ремонтных воздействий и планированием ремонтов, невозможно без математического описания процессов изменения технического состояния основных конструктивных элементов в процессе эксплуатации.

Снижение работоспособности и отказ любой машины являются следствием воздействия ряда динамических процессов. Для того чтобы наиболее полно учесть влияние всех факторов, при анализе надежности машины используется системный подход. Любой конструктивный элемент машины – деталь, сопряжение, сборочная единица и машина в целом – рассматривается как технические системы, различные по уровню сложности.

Описание процесса изменения состояния технической системы с помощью структурных параметров связано с рядом сложностей, основной из которых является неоднозначность связи между состоянием системы и количественным значением параметра. Еще более осложняет задачу тот факт, что состояние любой технической системы определяется, как правило, несколькими параметрами, характер изменения и степень влияния каждого из которых на систему в целом неравнозначны.

Структура технической системы обладает пространственными и временными свойствами, которые пока до конца не раскрыты и трудно поддаются формализации. Поэтому при изучении системы приходится переходить от материальной структуры к кибернетической. В этом случае под формированием структуры подразумевается возникновение новых свойств во множестве элементов системы. Описание процесса формирования новой структуры кибернетической системы можно получить с помощью аппарата теории информации.

Основная часть

Рассмотрим пространство возможных состояний системы W, представляющее собой дискретное конечное множество состояний, X, где $X = 1, 2, ..., W$. Для каждого из W состояний характерно наличие определенной структуры системы.

Пусть $p = P\{X\}$, $0 \le p \le 1$ – вероятность состояния X. Для всего множества состояний справедливо $\sum_{i=1} p = I$.

Мерой неопределенности состояния системы X в некоторый момент времени T является энтропия, определяемая как математическое ожидание логарифма вероятности p,

$$H = M\{-K \ln p\},$$

где K – единица измерения энтропии.

В общем случае информационная энтропия системы следующая:

1) если сложная система представляется в качестве совокупности ряда подсистем с энтропиями H_1, H_2, … H_n, выполняется правило аддитивности

$$H = \sum H_i;$$

2) для любого пространства состояний системы изменение энтропии можно представить в виде двух составляющих:

$$dH = d_e H + d_i H, \tag{1}$$

где d_eH – изменение энтропии вследствие воздействия внешней среды; d_iH – изменение энтропии в результате внутренних процессов, происходящих в системе;

3) для необратимых процессов, к числу которых относятся процессы изнашивания, старения, усталости, коррозии и т.п., справедливо неравенство

$$d_i H > 0.$$

Изменение энтропии системы при обмене веществом с внешней средой может быть как положительным, так и отрицательным. Состояние системы определяется соотношением слагаемых энтропии в выражении (1).

Берталанфи ввел понятие «текущего равновесия» систем. Под текущим равновесием открытой системы понимается ее стационарное неравновесное состояние, устойчивое по отношению к малым колебаниям (отклонениям) определяющих параметров.

Для текущего равновесия справедливо равенство $d_e H = -d_i H$. Из последнего равенства следует, что для поддержания устойчивого стационарного состояния системы, соответствующего текущему равновесию, необходимо обеспечить постоянный приток отрицательной энтропии в объем системы, компенсирующий приращение энтропии в единицу времени, вызванное внутренними процессами, происходящими в системе.

Приращение энтропии системы в единицу времени $\Delta = \frac{d_i H}{dt}$ – показатель, введенный И. Пригожиным для оценки состояния неравновесных систем, названный им «производство энтропии». Производство энтропии является положительной величиной для всех необратимых процессов.

Равенство $d_e H = -d_i H$ означает, что процессы притока вещества из внешней среды при текущем равновесии должны быть сбалансированы с внутренними процессами, происходящими в системе. Поскольку внутренние процессы, протекающие в системе, необратимы, $d_i H > 0$. Протекающие в системе энергетические процессы всегда диссипативны, т.е. соответствуют уменьшению и рассеянию энергии. Диссипация энергии является основным признаком текущего равновесия открытой системы [2]. Для сложной системы, состоящей из нескольких подсистем, важнейшим условием возникновения упорядоченного состояния является согласованность поведения подсистем.

Любая техническая система в процессе функционирования испытывает определенные внешние воздействия со стороны окружающей среды. Как правило, эти воздействия имеют стабильный характер, т.е.

осуществляются систематически (или непрерывно) и имеют определенные пределы.

Такой характер внешних воздействий в сочетании с упорядоченностью строения материала детали предопределяет закономерность развития внутренних процессов в системе. Вследствие этого развитие внутренних процессов в системе также приобретает стационарный характер. В результате в системе самопроизвольно формируется некоторая структура, присущая определенному состоянию системы. Это явление получило название самоорганизации системы [2].

Таким образом, предпосылкой для формирования упорядоченной структуры открытой технической системы является установление взаимно однозначного соответствия между внутренними процессами, происходящими в системе, и внешним воздействием окружающей среды. С позиций теории информации это соответствие проявляется в существовании определенного соотношения между производством энтропии и обменом энтропией со средой.

Для открытой технической системы внешний вклад в энтропию определяется объемом управляющих воздействий. Поэтому для изменения энтропии системы справедливо равенство

$$dH = d_e H + d_i H = K_H,$$

где K_H – некоторая величина, характеризующая процесс изменения состояния системы.

В частности, при проведении интенсивных управляющих воздействий энтропия системы будет уменьшаться, поскольку отдача энтропии H в единицу времени будет превышать производство энтропии внутри системы

$$\Delta = \frac{d_i H}{dt}, \text{ т.е. } \frac{d_i H}{dt} < 0, \text{ если } \left|\frac{d_e H}{dt}\right| > \Delta \geq 0.$$

В случае отсутствия или недостаточности управляющих воздействий формирование системы происходит самопроизвольно, спонтанно, нецеленаправленно, в соответствии с закономерностями самоорганизации. Необратимые процессы, происходящие в структуре системы, при достижении параметрами ее состояния некоторых критических (предельных) значений приводят к фазовому переходу – скачкообразному изменению структуры и, соответственно, состояния системы. Таким образом, самоорганизация возможна в случае, когда определяющие параметры состояния системы превосходят некоторые критические (предельные) значения. Это означает, что самоорганизация не является универсальным свойством материи или системы, а осуществляется лишь при определенных сочетаниях внутренних и внешних условий.

В процессе существования и функционирования любой технической системы происходят необратимые процессы двух основных типов:

1) разрушение исходной структуры системы (соответствующей ее работоспособному состоянию), происходящее вблизи положения равновесия вследствие накопления необратимых изменений свойств материалов деталей;

2) возникновение новых структур, соответствующих неработоспособному состоянию системы, вдали от положения равновесия при особых сочетаниях внешних и внутренних условий.

В совокупности описанные выше процессы являются слагаемыми процесса перехода системы из работоспособного состояния в неработоспособное.

Если система находится в стационарном состоянии, случайные отклонения – флуктуации параметра состояния, вызванные изменением определяющих факторов, – не влекут за собой нарушения устойчивости состояния. Выход системы из состояния равновесия происходит лишь при определенном сочетании факторов. Необходимо определить максимальную величину отклонения определяющего параметра состояния от равновесного значения, при котором состояние системы качественно не изменится и равновесие не будет нарушено.

Рассмотрим систему, находящуюся в одном из X стационарных состояний: $X = \{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$.

Состояние системы определяется набором условий B и характеризуется параметрами $X_i(t)$. Множество всех возможных состояний – пространство возможных состояний системы – представлено n-мерным векторным пространством.

Параметры системы должны удовлетворять совокупности дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dX}{dt} = f_i(X_k, B); \;\; i = 1, 2, \ldots n,$$

где $B = \{\lambda_1 \ldots \lambda_n\}$ – совокупность параметров, характеризующих внешние условия и внутреннее состояние системы.

Предположим, что функции f являются аналитическими и не имеют общего множителя:

$$f_i(X_k, B) \neq f(X_k, B) F_i(X_k, B).$$

Тогда условия теоремы Коши о существовании единственности решения выполнимы. Это означает, что существует единственное решение, удовлетворяющее начальным условиям. Условие существования стационарных решений имеет вид

$$\frac{dX}{dt} = 0; \;\; f_i(X_k, B) = 0, \;\; i = 1, 2, \ldots n. \tag{2}$$

Условия стационарности состояния системы можно определить, решая приведенные уравнения. Решение уравнения (1) позволяет получить функцию $X(t)$, траектория которой характеризует изменение состояния системы во времени.

Для стационарного состояния системы, описываемого с помощью линейных функций,

$$f_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} X_k + B_i. \tag{3}$$

Из уравнений (2) и (3) можно получить условие стационарности состояния системы

$$\sum_{k=1}^{f} a_{ik} X_k + B_i = 0. \tag{4}$$

Если $Deta_{ij} \neq 0$, уравнения имеют однозначное решение $X^{(0)}$, которое для условия равновесия B^0 определяет стационарное состояние системы.

С учетом флуктуации траектория функции состояния системы

$$X(t) = X_i^{(S)} + \delta X_i, \tag{5}$$

где $X_i^{(S)}$ – значение параметра состояния системы, соответствующее стационарному состоянию; δX_i – величина отклонения – флуктуации параметра.

Если зарегистрированное в момент времени $t = t_i$ отклонение параметра $\delta X_i \neq 0$ через определенный промежуток $(t - t_i)$ самопроизвольно уменьшается (без проведения внешних управляющих воздействий), то стояние системы можно считать асимптотически устойчивым. Величина промежутка $(t - t_i)$ определяется характеристическим временем релаксации системы.

Условие асимптотической устойчивости определяется критерием Ляпунова

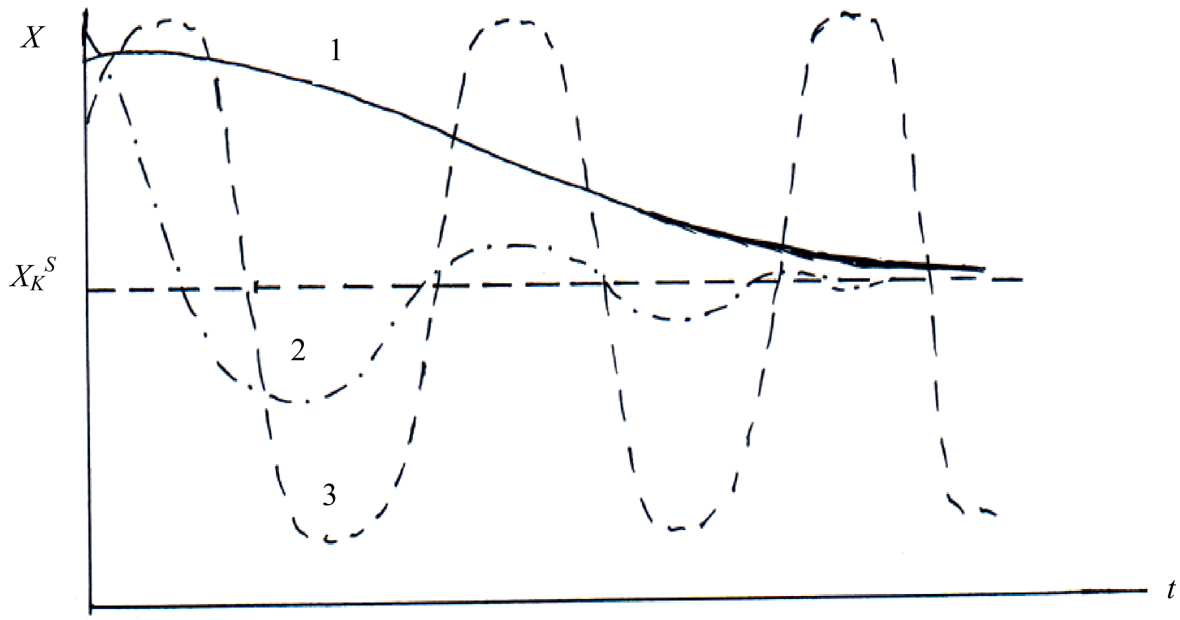
$$|\,\delta X(t)\,| = |\,X(t) - X^{(S)}\,| \to 0 \text{ при } t \to \infty. \tag{6}$$

В случае если отклонение параметра состояния превышает некоторое предельное значение, амплитуда колебаний возрастает, после чего система спонтанно выходит из стационарного состояния (рисунок).

Вероятность возникновения отклонения определяющего параметра состояния изолированной системы выражается основной формулой Эйнштейна

$$P_r \sim \exp\frac{\Delta H}{K},$$

где ΔH – отклонение энтропии системы от равновесного значения;
K – постоянная Больцмана.



Графическое представление состояния системы: 1 – устойчивого (стационарного); 2 – асимптотически устойчивого; 3 – неустойчивого

Разложение энтропии равновесного значения выглядит следующим образом:

$$H = H_e + (\delta H)_e + \frac{1}{2}(\delta^2 H).$$

Для изолированной системы $(\delta H)_e = 0$.

Следовательно,

$$P_r \sim \exp\left[\frac{1(\delta^2 H)}{2K}\right].$$

Последнее выражение справедливо, как для равновесных, так и для неравновесных состояний системы [1].

Заключение

Предложенная математическая модель может быть использована для прогнозирования надёжности технических систем и планирования управляющих ремонтных воздействий.

Список литературы

1. Эбелинг В. Образование структур при необратимых процессах. М.: Мир, 1979. 279 с.

2. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 213 с.

3. Зорин В.А., Баурова Н.И. Анализ работоспособности элементов металлоконструкций с применением аппарата теории катастроф // Вестник МАДИ. 2009. № 1. С. 7–10.

4. Bertalanffy L. General System Theory. New York: George Braziller, 1968. 289 p.

References

1. Ehbeling V. *Obrazovanie struktur pri neobratimyh processah* (The formation of structures in irreversible processes), Moscow, Mir, 1979, 279 p.

2. Nikolis G., Prigozhin I. *Samoorganizaciya v neravnovesnyh sistemah* (Self-organization in nonequilibrium systems), Moscow, Mir, 1979, 213 p.

3. Zorin V.A., Baurova N.I. *Vestnik MADI*, 2009, no. 1, pp. 7–10.

4. Bertalanffy L. *General System Theory*, New York, George Braziller, 1968, 289 p.