

Научная статья
УДК 531.315.17

Цепная линия абсолютно гибкой нерастяжимой нити

Сергей Вячеславович Борисов

Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Россия
sv-brisov@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0009-4288-1479>

Аннотация. Статья посвящена исследованию формы, которую приобретает подвешенная гибкая однородная нерастяжимая нить в однородном поле силы тяжести. Проведено сравнение между линиями нити, полученными в ходе эксперимента, и теоретическими цепными линиями, полученными с учетом допущения, что нить является абсолютно гибкой и нерастяжимой. При расчете использовалось точное (в рамках принятых допущений) уравнение цепной линии и приближенное уравнение. Показано, что точное уравнение цепной линии хорошо согласуется с экспериментальными данными в широком диапазоне значений стрел провеса нити. Приближенное уравнение цепной линии удовлетворительно коррелирует с экспериментальными данными при малых стрелах провеса. С увеличением стрелы провеса нити погрешность расчета существенно увеличивается, и цепная линия, построенная с использованием приближенного уравнения, значительно отклоняется от экспериментальной кривой. Основываясь на хорошем соответствии точных теоретических цепных линий с экспериментальными кривыми, проводится сравнение результатов расчета стрелы провеса и максимального натяжения нити по точным и приближенным теоретическим формулам и определяется относительная погрешность результатов расчета, получаемых по приближенным формулам. Также определяется предельное значение отношения длины нити к длине пролета, при котором можно пользоваться приближенными формулами при заданной погрешности расчета.

Ключевые слова: гибкая однородная нить, цепная линия, натяжение, стрела провеса.

Для цитирования: Борисов С.В. Цепная линия абсолютно гибкой нерастяжимой нити // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. 2024. №1(39).

Original article

Catenary line of absolutely flexible inextensible thread

Sergey V. Borisov

Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
Moscow, Russia
sv-brisov@mail.ru, <https://orcid.org/0009-0009-4288-1479>

№ 1(39)
март 2024

Abstract: The paper deals with the comparison of experimental and theoretical catenary lines. It is assumed that the thread is in a uniform field of gravity. Theoretical catenary lines are obtained taking into account the assumption that the thread is absolutely flexible and inextensible. The calculation used the exact catenary equation and the approximate equation. It is shown that the exact catenary equation agrees well with experimental data in a wide range of thread sag values. The approximate catenary equation satisfactorily correlates with the experimental data for small sag. With an increase in the sag of the thread, the calculation error increases significantly. A catenary constructed using an approximate equation deviates considerably from the experimental curve. Based on the good agreement between the exact theoretical chain lines and the experimental curves, the results of calculating the sag and the maximum thread tension are compared using exact and approximate theoretical formulas, and the relative error of the calculation results obtained using the approximate formulas is determined. The limiting value of the ratio of the length of the thread to the length of the span is also determined, at which it is possible to use approximate formulas for a given calculation error.

Key words: flexible homogeneous thread, catenary, tension, sag

For citation: Borisov S.V. Catenary line of absolutely flexible inextensible thread. *Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura*. 2024. №1 (39).

Введение

Задачи расчета гибкой нити часто встречаются в электроэнергетике и при конструировании машин и инженерных сооружений. В рамках разработанных теорий используются различные подходы к решению подобных задач. Точность решения можно оценить путем сравнения расчетных и экспериментальных данных. В некоторых источниках встречаются неточности. Так, в [1] приведена ошибочная формула приближенной длины тяжелой подвешенной нити, связывающая длину нити и величину стрелы провеса нити:

$$L = l + \frac{16f^2}{3l},$$

где L – длина нити, l – длина пролета, f – стрела провеса нити. (Примечание: эта формула получена для точек подвеса нити, расположенных на одной высоте).

Правильная формула приближенного расчета имеет вид

$$L = l + \frac{8f^2}{3l}. \quad (1)$$

В результате приближенная формула вычисления стрелы провеса нити должна иметь вид

$$f = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{3l(L-l)} \quad (2)$$

(вместо $f = \frac{1}{4} \sqrt{3l(L-l)}$, как приведено в [1]). Как следствие, в примере, приведенном там же, результаты расчета существенно отличаются от значений, вычисленных по точным теоретическим формулам.

Целью данной работы является сопоставление экспериментальных и расчетных данных, сравнение результатов расчета по точным теоретическим и приближенным формулам, определение погрешности приближенных формул по сравнению с точными, а также предельного значения отношения длины нити к длине пролета, при котором можно пользоваться приближенными формулами при заданной погрешности расчета. В настоящей работе под точными понимаются формулы, полученные при допущении об однородной нерастяжимой абсолютно гибкой нити, а под приближенными – формулы, которые можно получить из точных, например, путем разложения соответствующих функций в ряд.

Уравнение цепной линии

Прежде всего, запишем уравнение цепной линии однородной нерастяжимой нити. Оно приведено во многих книгах и учебниках по механике [2-4]. Будем считать нить абсолютно гибкой, т.е. не оказывающей сопротивления изгибу и кручению. Такая модель во многих случаях дает приемлемые по точности результаты при расчете конструкций, включающих цепи, тросы, канаты и другие гибкие и протяженные объекты. Точное теоретическое уравнение цепной линии имеет вид

$$y = a \left(\operatorname{ch} \frac{x}{a} - 1 \right), \quad a = \frac{H}{\gamma}. \quad (3)$$

где $a = \frac{H}{\gamma}$, $\gamma = \text{const}$ – погонный вес нити, H – горизонтальная составляющая силы натяжения нити. Его можно получить из уравнений, приведенных, например, в [2].

При подстановке краевых условий уравнение (3) дает формулы вычисления стрелы провеса f , длины L и силы натяжения T нити, а также формулу, связывающую модуль разности вертикальных координат точек подвеса h с другими параметрами, определяющими геометрию нити и силу ее натяжения.

$$f = a \left(\operatorname{ch} \frac{\delta}{a} - 1 \right), \quad (4)$$

$$h = a \left(\operatorname{ch} \frac{\delta}{a} - \operatorname{ch} \frac{l - \delta}{a} \right), \quad (5)$$

$$L = a \left(\operatorname{sh} \frac{\delta}{a} + \operatorname{sh} \frac{l - \delta}{a} \right), \quad (6)$$

$$T = \gamma(a + y), \quad (7)$$

где $\lambda = \frac{l}{2a}$, l – величина пролета, δ – расстояние от верхней точки подвеса нити до вертикальной плоскости, проходящей через нижнюю точку нити.

Выражения (4)-(7) позволяют выполнить расчет нити, например, по заданной длине нити L , пролете l , величине h и удельному весу γ вычислить стрелу провеса нити f , силу натяжения T в любой точке нити, а также параметр δ .

После преобразований из формул (5) и (6) можно получить следующее уравнение

$$\operatorname{sh} \lambda = k\lambda, \quad (8)$$

в котором $\lambda = \frac{l}{2a}$, $k = \frac{\sqrt{L^2 - h^2}}{l} = \frac{L}{l} \sqrt{1 - \left(\frac{h}{L}\right)^2}$.

Очевидно, что $k \geq 1$. На рис. 1 показана зависимость параметра λ от коэффициента k .

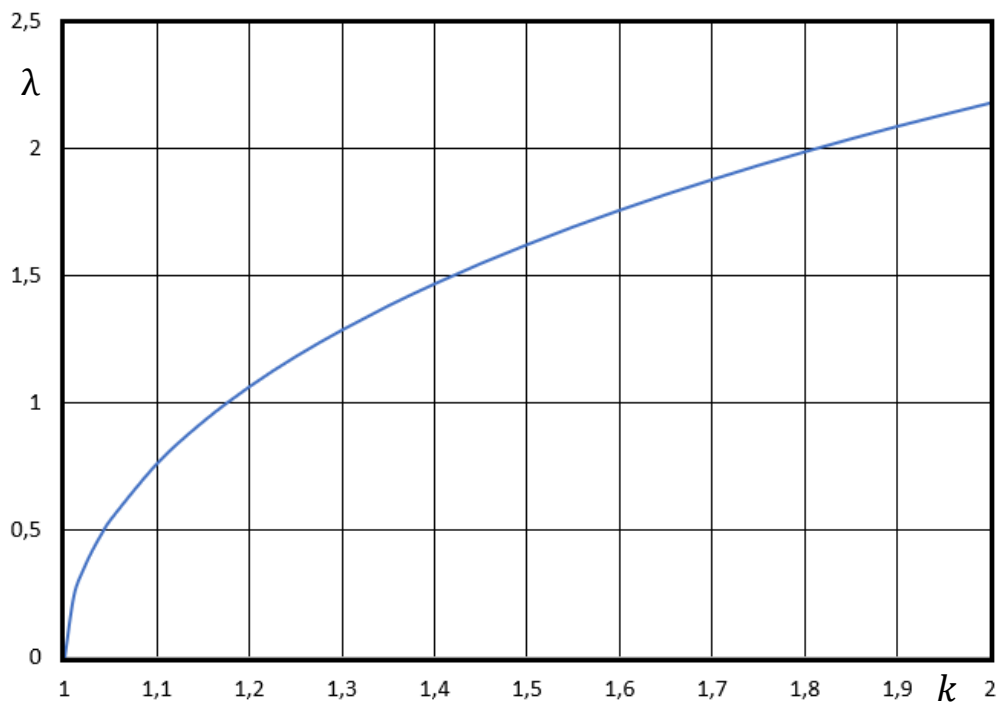


Рис. 1. Зависимость параметра λ от коэффициента k

Рассмотрим случай, когда точки подвеса нити расположены на одной высоте. В этой ситуации $h = 0$, $\delta = \frac{l}{2}$, $k = k_1 = \frac{L}{l}$. Тогда получим

$$f = a \left(\operatorname{ch} \frac{l}{2a} - 1 \right), \quad (9)$$

$$L = 2a \operatorname{sh} \frac{l}{2a}, \quad (10)$$

$$T_{\max} = \gamma(a + f), \quad (11)$$

где $T_{\max}$ – максимальное значение силы натяжения нити.

Приближенные формулы расчета можно получить путем разложения функций (3) и (10) в ряд Маклорена.

$$y = \frac{x^2}{2a} + \frac{x^4}{24a^3} + \dots, \quad (12)$$

$$L = l + \frac{l^3}{24a^2} + \frac{l^5}{1920a^4} \dots. \quad (13)$$

При малых стрелах провеса в выражении (12) удерживают только первое слагаемое, а в выражении (13) – первые два слагаемых. При этом используют приближенную формулу, связывающую горизонтальную составляющую силы натяжения нити и стрелу провеса. Эту взаимосвязь легко получить, записав, например, уравнение моментов относительно точки подвеса нити при рассмотрении равновесия одной из половин нити с малой стрелой провеса. В результате получим $a = \frac{H}{\gamma} = \frac{l^2}{8f}$, и тогда выражения (12) и (13) можно переписать в следующем виде.

$$y = \frac{4f}{l^2} x^2, \quad (14)$$

$$L = l + \frac{8f^2}{3l}. \quad (15)$$

Выражение (15) совпадает с выражением (1). Откуда

$$f = \frac{l}{2\sqrt{2}} \sqrt{3(k_1 - 1)}, \quad k_1 = \frac{L}{l}. \quad (16)$$

Полученное приближенное выражение (16) для вычисления стрелы провеса нити совпадает с выражением (2).

С учетом формулы (16) выражение (14) можно переписать в следующем виде

$$y = x^2 \frac{\sqrt{2}}{l} \sqrt{3(k_1 - 1)}. \quad (17)$$

Учитывая, что в точке подвеса вертикальная составляющая силы натяжения нити достигает значения $\gamma l/2$, получим формулу для вычисления максимального значения силы натяжения нити.

$$T_{\max} = \frac{\gamma l}{2} \sqrt{1 + \frac{l^2}{16f^2}}. \quad (18)$$

Экспериментальная и теоретические цепные линии

На рисунках 2-4 показаны реальные линии, которые образовала цепь в результате эксперимента, и теоретические линии, построенные согласно выражениям (3) и (14). При сравнении кривых следует учитывать искажения реальных линий в результате их фотографирования, а также тот факт, что использовавшаяся в эксперименте цепь не являлась абсолютно нерастяжимой [1-4]. Из рисунков видно, что точная теоретическая цепная линия, полученная согласно выражению (3) для нерастяжимой нити, хорошо согласуется с экспериментом при различных отношениях L/l . Цепная линия, построенная согласно приближенному выражению (14), значительно отклоняется от экспериментальной кривой. Совпадение с экспериментом улучшается при уменьшении отношения L/l , что естественно ввиду принятого допущения о малости стрелы провеса.

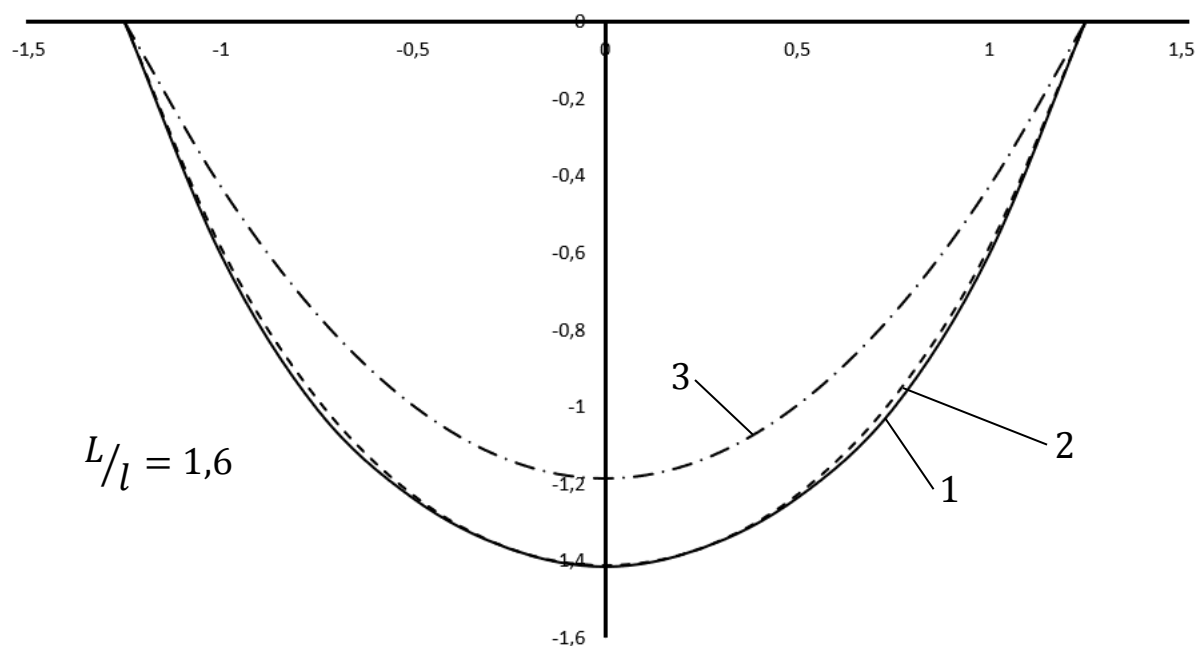


Рис. 2. Экспериментальная и теоретические цепные линии:
1 – экспериментальная линия; 2 – точная теоретическая линия;
3 – приближенная теоретическая линия

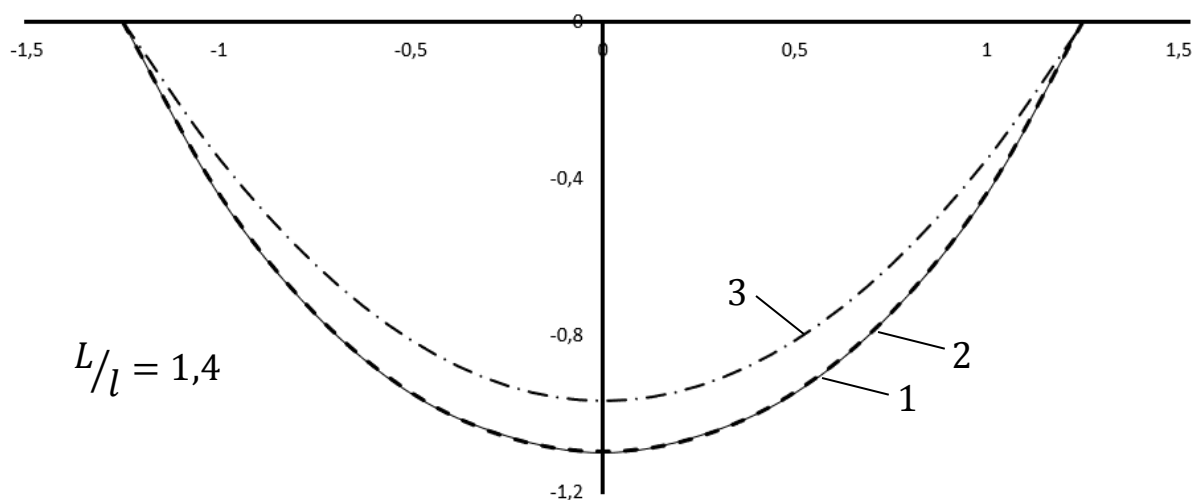


Рис. 3. Экспериментальная и теоретические цепные линии:
1 – экспериментальная линия; 2 – точная теоретическая линия;
3 – приближенная теоретическая линия

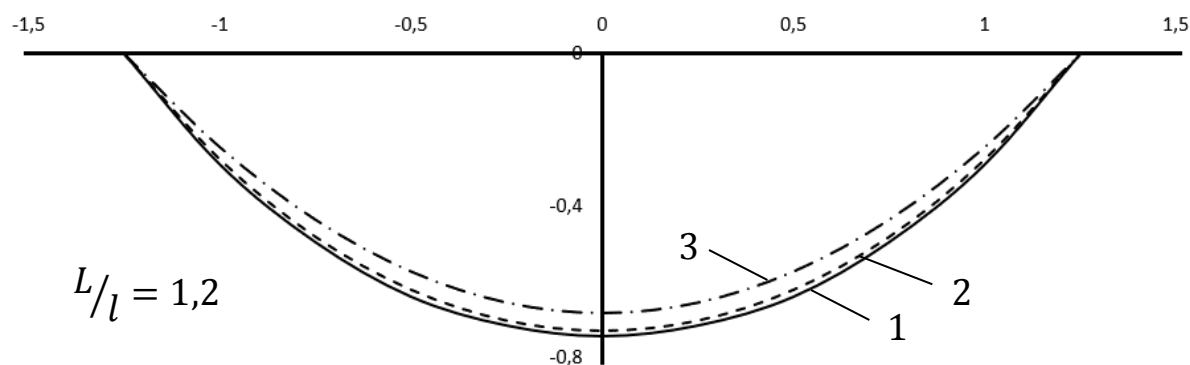


Рис. 4. Экспериментальная и теоретические цепные линии:
1 – экспериментальная линия; 2 – точная теоретическая линия;
3 – приближенная теоретическая линия

В таблице 1 приведены результаты расчета величины провеса нити по формуле (9) и данные, полученные в ходе эксперимента. При анализе данных таблицы следует учитывать погрешность измерений вследствие несовершенства методики измерения стрелы провеса посредством рулетки, а также некоторую растяжимость нити, использовавшейся в эксперименте. Данные таблицы демонстрируют хорошее соответствие результатов расчета и эксперимента.

Таблица 1

$k_1 = \frac{L}{l}$	Стрела провеса, м		Погрешность, %
	эксперимент	расчет	
1,1	0,533	0,501	6,0
1,2	0,745	0,731	1,9
1,3	0,933	0,922	1,2
1,4	1,1	1,095	0,5
1,5	1,259	1,257	0,2
1,6	1,414	1,411	0,2

Основываясь на данных табл. 1 и рис. 2-4, можно утверждать, что точное теоретическое уравнение цепной линии (3) дает результаты, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Взяв это за основу, выполним сравнение результатов расчета по точным теоретическим формулам (9) и (11) и приближенным формулам (16) и (18). Найдем погрешность, которую приближенные формулы вносят в расчет стрелы провеса и максимального значения силы натяжения нити. Для определения погрешности расчета стрелы провеса нити в процентах вычтем выражение (16) из выражения (9) и поделим полученную разность на выражение (9). С учетом $a = l/2\lambda$ получим

$$\eta_f = \left(1 - \frac{\lambda \sqrt{3(k_1 - 1)}}{(\operatorname{ch} \lambda - 1)} \right) 100. \quad (19)$$

Аналогично для определения погрешности расчета максимальной силы натяжения нити вычтем выражение (18) из выражения (11) и поделим полученную разность на выражение (11). Тогда получим

$$\eta_{T_{\max}} = \left(1 - \frac{\lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \sqrt{1 + \frac{1}{6(k_1 - 1)}} \right) 100. \quad (20)$$

В выражениях (19) и (20) λ – решение уравнения (8). Так как λ определяется величиной $k_1 = L/l$, из выражений (19) и (20) видно, что погрешности расчета по приближенным формулам (16) и (18) зависят только от отношения длины нити и величины пролета L/l . В табл. 2 приведены значения погрешностей, рассчитанные по формулам (19) и (20).

Таблица 2

$k_1 = \frac{L}{l}$	Погрешность расчета стрелы провеса η_f , %	Погрешность расчета максимальной силы натяжения $\eta_{T_{\max}}$, %
1,01	0,4	0,2
1,05	1,7	1,7
1,1	3,3	4,5
1,2	6,3	11,1
1,3	9,1	17,6
1,4	11,6	23,6
1,5	13,9	28,8
1,6	16,0	33,4

На рисунке 5 представлено графическое отображение данных табл. 2.

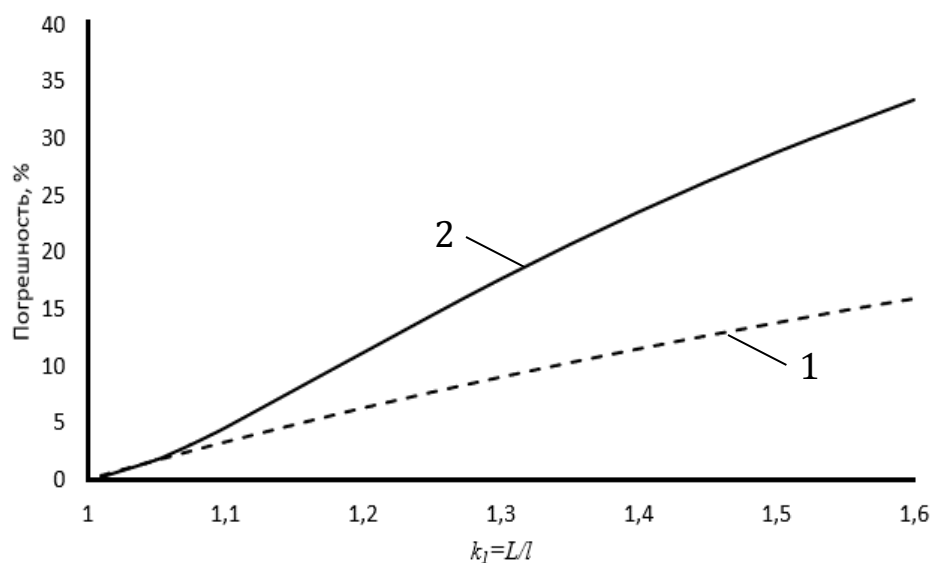


Рис. 5. Погрешность расчета: 1 – стрелы провеса нити;
2 – максимальной силы натяжения нити

Из рисунка 5 видно, что погрешность расчета максимального значения силы натяжения нити $\eta_{T_{\max}}$ растет более быстро с увеличением отношения L/l по сравнению с погрешностью расчета стрелы провеса нити η_f . Задавшись максимальной величиной погрешности расчета максимального значения силы натяжения нити, из графика 2 (рис. 5) легко определить предельное значение отношения L/l , которое обеспечит не превышение заданной погрешности [5-11]. Например, для $\eta_{T_{\max}} = 3 \%$ получим предельное значение $k_1 = L/l$, равное 1,07.

Заключение

Точное теоретическое уравнение цепной линии хорошо согласуется с результатами эксперимента. Приближенная теоретическая формула дает удовлетворительные результаты только при малых стрелах провеса нити. С увеличением отношения длины нити к величине пролета погрешность расчета максимального значения силы натяжения нити по приближенной формуле растет быстрее по сравнению с погрешностью расчета стрелы провеса нити. Полученные формулы погрешности расчета стрелы провеса и максимальной силы натяжения нити позволяют, задавшись максимальной величиной погрешности расчета, определить предельное значение отношения длины нити к величине пролета, которое обеспечит не превышение заданной погрешности.

Список источников

1. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 736 с.
2. Меркин, Д.Р. Введение в механику гибкой нити / Д.Р. Меркин. – Москва: Наука, 1980. – 240 с.
3. Курс теоретической механики / под общ. ред. К.С. Колесникова. – Москва: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 736 с.
4. Бухгольц, Н.Н. Основы курса теоретической механики. Ч. 1 / Н.Н. Бухгольц. – Санкт-Петербург: Лань, 2021. – 448 с.

5. Кужахметова, Э. Р. Деформация вант при различных условиях нагружения / Э. Р. Кужахметова // Известия КГТУ. – 2019. – № 52. – С. 154-168. – EDN YVOAGD.
6. Кужахметова, Э. Р. Напряженно-деформированное состояние цилиндрично-плитно-вантового покрытия здания (сооружения) с различными формами наружного опорного контура / Э. Р. Кужахметова // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2020. – Т. 16, № 2. – С. 95-110. – DOI 10.22363/1815-5235-2020-16-2-95-110. – EDN RUOFTA.
7. Брюквин, А. В. Энергетический метод для решения волновых задач гибкой нити / А. В. Брюквин, О. Ю. Брюквина // Инженерный журнал: наука и инновации. – 2020. – № 5(101). – С. 1. – DOI 10.18698/2308-6033-2020-5-1977. – EDN NZDMQR.
8. Бладыко, Ю. В. Механический расчет гибких токопроводов при замене сосредоточенных сил распределенной нагрузкой / Ю. В. Бладыко // Энергетика. Известия высших учебных заведений и энергетических объединений СНГ. – 2018. – Т. 61, № 2. – С. 97-107. – DOI 10.21122/1029-7448-2018-61-2-97-107. – EDN YVTBLE.
9. Мищенко, В. В. Параметрическое уравнение цепной линии для расчета гибкой нити / В. В. Мищенко // Строительная механика и расчет сооружений. – 2020. – № 4(291). – С. 40-46. – DOI 10.37538/0039-2383.2020.4.40.46. – EDN PCVOUC.
10. Сенотова, С. А. Об устойчивости цепной линии / С. А. Сенотова // Современные технологии и научно-технический прогресс. – 2022. – № 9. – С. 141-142. – EDN YIRFNP.
11. О выборе математических моделей висячих элементов при проектировании крупногабаритного параллельного тросового робота / Е. А. Марчук, Я. В. Калинин, М. А. Иванов, А. В. Малолетов // Известия Волгоградского государственного технического университета. – 2022. – № 9(268). – С. 56-62. – DOI 10.35211/1990-5297-2022-9-268-56-62. – EDN SZNNNF.

References

1. Butenin N.V., Lunc Ya.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* (Course of mechanics), Saint Petersburg, Lan', 2009, 736 p.
2. Merkin D.R. *Vvedenie v mekhaniku gibkoy niti* (Introduction to mechanics of flexible thread) Moscow, Nauka, 1980, 240 p.
3. Kolesnikov K.S. (ed.) *Kurs teoreticheskoy mekhaniki* (Course of mechanics), Moscow, Izdatel'stvo MGTU im. N.Je. Baumana, 2000, 736 p.
4. Buhgol's N.N. *Osnovnoj kurs teoreticheskoy mekhaniki* (Basic course of mechanics), vol. 1, Saint Petersburg, Lan', 2021, 448 p.
5. Kuzhahmetova Je. R. *Izvestiya KGTU*, 2019, no. 52, pp. 154-168.
6. Kuzhahmetova Je. R. *Stroitel'naja mehanika inzhenernyh konstrukcij i sooruzhenij*, 2020, vol. 16, no. 2, pp. 95-110.

7. Brjukvin, A. V., Brjukvina O. Ju. *Inzhenernyj zhurnal: nauka i innovacii*, 2020, no. 5(101), p. 1.
8. Bladyko, Ju. V. *Izvestija vysshih uchebnyh zavedenij i jenergeticheskikh ob#edinenij SNG*, 2018, vol. 61, no. 2, pp. 97-107.
9. Mishhenko, V. V. *Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij*, 2020, no. 4(291), pp. 40-46.
10. Senotova, S. A. *Sovremennye tehnologii i nauchno-tehnicheskij progress*, 2022, no. 9, pp. 141-142.
11. Marchuk E. A., Kalinin Ja. V., Ivanov M. A., Maloletov A. V. *Izvestija Volgogradskogo gosudarstvennogo tehničeskogo universiteta*, 2022, no. 9(268), pp. 56-62.

Рецензент: Г.М. Розенблат, д-р физ.-мат. наук, проф., МАДИ

Информация об авторе

Борисов Сергей Вячеславович, канд. техн. наук, доц., МАДИ.

Information about the authors

Borisov Sergey V., Candidate of Sciences (Technical), associate professor, MADI.

Статья поступила в редакцию 29.02.2024; одобрена после рецензирования 05.03.2024; принята к публикации 18.03.2024.

The article was submitted 29.02.2024; approved after reviewing 05.03.2024; accepted for publication 18.03.2024.