

Научная статья
УДК 531.1, 629.7.05

Навигация беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат

Сергей Вячеславович Борисов¹, Елена Алексеевна Аброськина²

^{1,2}Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет (МАДИ),
Москва, Россия

¹sv-brisov@mail.ru

²abroskinahelen@yandex.ru

Аннотация. В статье рассмотрены вопросы кинематики беспилотных летательных аппаратов (БПЛА). Движение БПЛА как материальной точки рассматривается в эллиптической системе координат. Положение БПЛА в этой системе координат определяется на основе разностно-дальномерной информации, которая может быть получена от двух навигационных станций. С целью генерации управляющих воздействий для обеспечения движения БПЛА по заданной траектории необходимо определение ускорений БПЛА, возникающих при движении по конкретной траектории. В качестве примера решения задачи подобного рода рассматривается движение точки по одной из координатных линий с постоянной по модулю скоростью. Получено выражение, позволяющее рассчитать ускорение точки на основе данных об эллиптических координатах, то есть, не прибегая к вычислению радиуса кривизны траектории.

Ключевые слова: беспилотный летательный аппарат, эллиптическая система координат, движение вдоль координатной линии.

Для цитирования: Борисов С.В., Аброськина Е.А. Навигация беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат // Автомобиль. Дорога. Инфраструктура. 2023. №2 (36).

Original article

Navigation of an unmanned aerial vehicle in an elliptical coordinate system

Sergey V. Borisov¹, Elena A. Abroskina²

^{1,2}Moscow Automobile and Road Construction State Technical University (MADI),
Moscow, Russia,

¹sv-brisov@mail.ru

²abroskinahelen@yandex.ru

Abstract. The article deals with the kinematics of unmanned aerial vehicles (UAVs). The movement of the UAV as a material point is considered in an elliptical coordinate system. The position of the UAV in this coordinate system is determined based on the difference-range-finder information that can be obtained from two navigation stations. In order to generate control actions to ensure the movement of the UAV along a given trajectory, it is necessary to determine the accelerations of the UAV that occur when moving along a specific trajectory. As an example of solving a problem of this kind, the motion of a point along one of the coordinate lines with a constant velocity modulo is considered. An expression is obtained that allows calculating the acceleration of a point based on data on elliptical coordinates, that is, without resorting to calculating the radius of curvature of the trajectory.

Keywords: unmanned aerial vehicle, elliptical coordinate system, movement along a coordinate line.

For citation: Borisov S.V., Abroskina E.A. Navigation of an unmanned aerial vehicle in an elliptical coordinate system. *Avtomobil'. Doroga. Infrastruktura*. 2023. №2 (36).

Введение

Применение современных технических средств для мониторинга дорожного движения, опасных участков дорог, аварийно-спасательных работ в режиме реального времени позволяет оперативно организовывать мероприятия по выявлению правонарушений, предотвращению и ликвидации нежелательных чрезвычайных ситуаций. В качестве таких средств могут использоваться и уже используются беспилотные летательные аппараты (БПЛА). На данный момент БПЛА применяются для контроля участков дорог в 17 регионах России. Например, в республике Адыгея БПЛА помогают выявлять нарушителей на дорогах и, в частности, административные правонарушения, связанные с выездом на полосу встречного движения. В Краснодарском крае на въезде контролируемых участков дорог установлены щиты с предупреждением «Внимание! Контроль выезда на встречную полосу!» и изображением беспилотного летательного аппарата. Помимо этого, БПЛА могут использоваться для выявления повреждений барьерных ограждений, дефектов дорожной поверхности, истирания дорожной разметки, экологического картирования,

инвентаризации дорожных знаков и т.д. В числе перспективных возможностей БПЛА – их применение при поисках угнанного автомобиля, находящегося на закрытой территории, а также при попытке автомобиля скрыться с места преступления.

В данной статье рассматриваются вопросы кинематики беспилотного летательного аппарата, в частности, его движение в эллиптической системе координат. Следует отметить, что определение ускорения БПЛА при его движении по заданной траектории тесно связано с задачей генерации управляющего воздействия, необходимого для обеспечения движения БПЛА по этой траектории.

Движение БПЛА в эллиптической системе координат

В трехмерном пространстве положение БПЛА, как точки, определяется тремя координатами. В качестве таковых могут использоваться различные числовые параметры, однозначно определяющие положение БПЛА, в том числе, криволинейные координаты. С точки зрения практического применения наибольшее удобство представляют ортогональные криволинейные координаты, для которых единичные векторы образуют ортонормированный базис. Одной из таких систем является эллипсоидальная система координат, а при определении положения объекта на плоскости – эллиптическая система координат [1, 2].

Рассмотрим движение БПЛА в плоскости. Положение БПЛА в плоскости вполне определяется расстояниями d_1 и d_2 от БПЛА до навигационных точек (рис. 1). По ним можно определить координаты БПЛА в декартовой и эллиптической системах координат.

$$\begin{aligned} x &= d_1 \cos \alpha - c, \quad y = d_1 \sin \alpha, \\ \cos \alpha &= \frac{4c^2 + d_1^2 - d_2^2}{4cd_1}, \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}, \end{aligned} \quad (1)$$

где c – половина расстояния между навигационными точками A и B .

$$\begin{aligned} \mu &= \operatorname{arcch} \sigma, \quad \nu = \operatorname{arccos} \tau, \\ \sigma &= \frac{d_1 + d_2}{2c}, \quad \tau = \frac{d_1 - d_2}{2c}, \end{aligned} \quad (2)$$

где μ и ν – эллиптические координаты, σ и τ – линии уровня, являющиеся конфокальными эллипсами и гиперболами соответственно.

Декартовы и эллиптические координаты связаны следующими соотношениями [3].

$$x = c \operatorname{sh} \mu \cos \nu, \quad y = c \operatorname{sh} \mu \sin \nu.$$

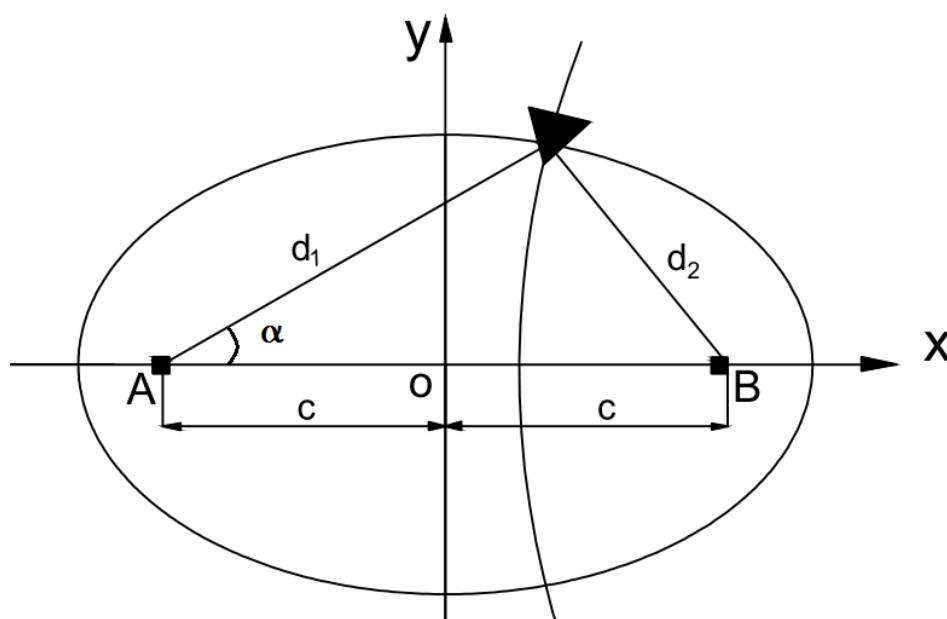


Рис. 1. Определение положения БПЛА по расстояниям до навигационных точек

Коэффициенты Ламе связаны с координатами μ и ν следующими соотношениями.

$$\begin{aligned} H_\mu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \mu}\right)^2} = c \sqrt{\operatorname{sh}^2 \mu \cos^2 \nu + \operatorname{ch}^2 \mu \sin^2 \nu}, \\ H_\nu &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \nu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \nu}\right)^2} = c \sqrt{\operatorname{ch}^2 \mu \sin^2 \nu + \operatorname{sh}^2 \mu \cos^2 \nu}. \end{aligned} \quad (3)$$

Из полученных выражений видно, что коэффициенты Ламе H_μ и H_ν равны между собой.

Найдем орты $\vec{e}_\mu$ и $\vec{e}_\nu$ координатных осей эллиптической системы координат (рис. 2) в декартовой системе координат.

$$\vec{e}_\mu = \frac{1}{H_\mu} \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \mu} \vec{j} \right) = \frac{1}{H_\mu} (csh\mu \cos \nu \vec{i} + cch\mu \sin \nu \vec{j}),$$

$$\vec{e}_\nu = \frac{1}{H_\nu} \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} \vec{i} + \frac{\partial y}{\partial \nu} \vec{j} \right) = \frac{1}{H_\nu} (-cch\mu \sin \nu \vec{i} + csh\mu \cos \nu \vec{j}).$$

С учетом формулы вычисления скорости точки в криволинейных координатах [4] вектор скорости БПЛА в эллиптической системе координат определяется следующим выражением

$$\vec{V} = \dot{\mu} H_\mu \vec{e}_\mu + \dot{\nu} H_\nu \vec{e}_\nu, \quad (4)$$

Тогда ускорение БПЛА может быть вычислено следующим образом

$$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = (\ddot{\mu} H_\mu + \dot{\mu} \dot{H}_\mu) \vec{e}_\mu + \dot{\mu} H_\mu \dot{\vec{e}}_\mu + (\ddot{\nu} H_\nu + \dot{\nu} \dot{H}_\nu) \vec{e}_\nu + \dot{\nu} H_\nu \dot{\vec{e}}_\nu. \quad (5)$$

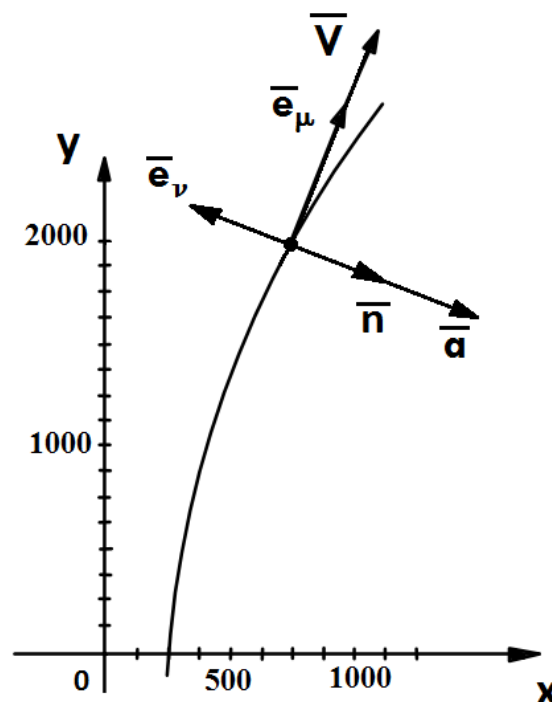


Рис. 2. Схема движения БПЛА по гиперболе с постоянной по модулю скоростью

Для оценки управляющих воздействий, необходимых для движения БПЛА по заданной траектории, рассмотрим движение БПЛА с постоянной по модулю скоростью 100 м/с вдоль одной из навигационных линий и вычислим ускорение БПЛА при задании его движения в эллиптической системе координат. Для определенности будем считать, что расстояние между навигационными точками равно 1600 м, и в данный момент времени расстояния от БПЛА до навигационных точек A и B составляют 2500 м и 2000 м соответственно. Тогда согласно формулам (1) положение БПЛА будет определяться следующими декартовыми координатами $x = 703$ м, $y = 1998$ м.

Положение БПЛА в эллиптической системе координат будет определяться координатами $\mu = 1,694$ и $\nu = 1,253$, вычисляемыми по формулам (2).

Пусть для наведения БПЛА необходимо обеспечить его движение по гиперболе, проходящей через положение, которое занимает БПЛА в данный момент времени. То есть $\nu = 1,253 = \text{const}$. Уравнение этой гиперболы имеет следующий вид

$$\frac{x^2}{c^2 \cos^2 \nu} - \frac{y^2}{c^2 \sin^2 \nu} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Численно получим

$$\frac{x^2}{250^2} - \frac{y^2}{760^2} = 1.$$

Вектор скорости БПЛА направлен по касательной к этой гиперболе, то есть сонаправлен с вектором $\vec{e}_\mu$, и согласно формуле (4) он в этой ситуации определяется следующим выражением.

$$\vec{V} = \dot{\mu} H_\mu \vec{e}_\mu. \quad (6)$$

С учетом формулы (6) выражение (5) для ускорения примет следующий вид.

$$\vec{a} = (\ddot{\mu}H_{\mu} + \dot{\mu}\dot{H}_{\mu})\vec{e}_{\mu} + \dot{\mu}H_{\mu}\dot{\vec{e}}_{\mu}.$$

Найдем ускорение БПЛА для заданных условий движения. Из формулы (6) следует, что

$$\dot{\mu} = \frac{V}{H_{\mu}}, \quad \ddot{\mu} = -\frac{V}{H_{\mu}^2}\dot{H}_{\mu}$$

Подставив полученные выражения, получим, что ускорение как произведение скорости на производную по времени от единичного вектора $\vec{e}_{\mu}$.

$$\vec{a} = \left(-\frac{V}{H_{\mu}^2}\dot{H}_{\mu}H_{\mu} + \frac{V}{H_{\mu}}\dot{H}_{\mu} \right) \vec{e}_{\mu} + \frac{V}{H_{\mu}}H_{\mu}\dot{\vec{e}}_{\mu} = V\dot{\vec{e}}_{\mu}$$

Данная производная имеет следующий вид

$$\dot{\vec{e}}_{\mu} = \frac{V_{\mu}}{\rho}\vec{n} = \frac{V}{\rho}\vec{n}$$

где $\vec{n}$ - единичный нормальный вектор траектории, ρ – радиус кривизны гиперболы. С учетом $\vec{n} = -\vec{e}_{\nu}$ получим

$$\vec{a} = -\frac{V^2}{\rho}\vec{e}_{\nu}$$

То есть $a_{\mu} = 0, a_{\nu} = -\frac{v^2}{\rho}, a = \frac{v^2}{\rho}$. Найдем радиус кривизны гиперболы по формуле

$$\rho = \left| \frac{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}{y''} \right|.$$

Для нахождения производных y' и y'' найдем первую и вторую производные по x от уравнения гиперболы.

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2yy'}{b^2} = 0, \quad \frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}((y')^2 + yy'') = 0.$$

Откуда

$$y' = \frac{b^2}{a^2} x, \quad y'' = \frac{1}{y} \left(\frac{b^2}{a^2} - (y')^2 \right).$$

Численно получим $y' = 3,252, y'' = -6,676 \cdot 10^{-4}, \rho = 5,9 \cdot 10^4$ м. В результате ускорение БПЛА в данный момент времени принимает значение $0,17$ м/с². Вектор ускорения направлен противоположно вектору $\vec{e}_v$, т.е. перпендикулярно вектору скорости по главной нормали к центру кривизны гиперболы ($\vec{a} = -0,17\vec{e}_v$).

Вектор ускорения БПЛА можно найти также по известным формулам [4].

$$\vec{a} = a_\mu \vec{e}_\mu + a_v \vec{e}_v$$

$$a_\mu = \frac{1}{H_\mu} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mu}} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right),$$

$$a_v = \frac{1}{H_v} \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{v}} \left(\frac{V^2}{2} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V^2}{2} \right) \right),$$

где a_μ и a_v – проекции вектора ускорения на координатные оси μ и v соответственно. С учетом $\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2} \dot{\mu}^2 H_\mu^2$ получим $\frac{\partial}{\partial \dot{\mu}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \dot{\mu} H_\mu^2$. Вычислим проекции вектора ускорения.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{\mu}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \ddot{\mu} H_\mu^2 + 2 \dot{\mu} H_\mu \dot{H}_\mu = - \frac{V}{H_\mu^2} \dot{H}_\mu H_\mu^2 + 2 \frac{V}{H_\mu} H_\mu \dot{H}_\mu = V \dot{H}_\mu,$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \dot{\mu}^2 H_\mu \frac{\partial H_\mu}{\partial \mu} = \dot{\mu}^2 H_\mu \frac{\dot{H}_\mu}{\dot{\mu}} = \dot{\mu} H_\mu \dot{H}_\mu = \frac{V}{H_\mu} H_\mu \dot{H}_\mu = V \dot{H}_\mu.$$

Откуда $a_\mu = 0$.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{v}} \left(\frac{V^2}{2} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \dot{\mu}^2 \frac{\partial H_\mu^2}{\partial v}.$$

С учетом формул (3) получим

$$\frac{\partial H_{\mu}^2}{\partial v} = c^2 (-2sh^2 \mu \cos v \sin v + 2ch^2 \mu \sin v \cos v) = c^2 \sin 2v.$$

Тогда

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{V^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \dot{\mu}^2 c^2 \sin 2v = \frac{1}{2} \frac{V^2}{H_{\mu}^2} c^2 \sin 2v.$$

Окончательно получим

$$a_v = -\frac{c^2 \sin 2v}{2H_v H_{\mu}^2} V^2.$$

Вычислив $H_v = H_{\mu}$ по формулам (3), получим $a_v = -0,17 \text{ м/с}^2$, что совпадает с результатом, полученным ранее.

Заключение

Полученные формулы позволяют определять положение БПЛА в эллиптической системе координат по расстояниям до навигационных станций, а также рассчитать требуемое ускорение для выработки управляющего воздействия при наведении БПЛА вдоль навигационной линии. При наведении БПЛА по траекториям с большим радиусом кривизны БПЛА требуется развивать небольшое ускорение, что положительно сказывается на энергозатратах. Использование БПЛА для мониторинга дорожного движения и состояния автомобильных дорог в перспективе позволит повысить дисциплинированность водителей и, как следствие, снизить количество дорожно-транспортных происшествий, в особенности на участках, где невозможно установить средства фиксации нарушений.

Список источников

1. Легкоступ, В.В. Уравнения кинематики беспилотного летательного аппарата в эллиптической системе координат при наведении по разностно-дальномерной

навигационной информации / В.В. Легкоступ, В.В. Маркевич // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – № 1. – С. 12-20. – DOI 10.21122/2309-4923-2021-1-12-20.

2. Легкоступ, В.В. Методика определения кинематической связи между управляющими летательным аппаратом ускорениями и его эллиптическими координатами в альтернативном представлении / В.В. Легкоступ // Системный анализ и прикладная информатика. – 2021. – № 3. – С. 15-24. – DOI 10.21122/2309-4923-2021-3-15-24.

3. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров: Определения. Теоремы. Формулы / Г.А. Корн; Г.А. Корн, Т. Корн; [Пер. И. Г. Арамановича (ред. пер.) и др.]. – 6. изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2003. – 831 с. – ISBN 5-8114-0485-9.

4. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 736 с.

References

1. Legkostup V.V., Markevich V.E. *Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika*, 2021, no.1, pp.12-20.
2. Legkostup V.V. *Sistemnyj analiz i prikladnaja informatika*, 2021, no.3, pp.15-24.
3. Korn G. A., Korn T.M. *Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov: Opredelenija. Teoremy. Formuly* (Handbook of Mathematics for Researchers and Engineers: Definitions. Theorems. Formulas.), St. Petersburg, Lan', 2003, 831 p.
4. Butenin N.V., Lunc Ja.L., Merkin D.R. *Kurs teoreticheskoj mehaniki* (Course of theoretical mechanics), St. Petersburg, Lan', 2009, 736 p.

Рецензент Г.М. Розенблат, д-р. физ.-мат. наук, проф. МАДИ

Информация об авторах

Борисов Сергей Вячеславович, канд. техн. наук, доц., МАДИ.

Аброськина Елена Алексеевна, студент, МАДИ.

Information about the authors

Borisov Sergey V., Ph.D., associate professor, MADI.

Abroskina Elena A., student, MADI.

Статья поступила в редакцию 10.05.2023; одобрена после рецензирования 11.05.2023; принята к публикации 25.05.2023.

The article was submitted 10.05.2023; approved after reviewing 11.05.2023; accepted for publication 25.05.2023.