

УДК 656.1/5

## ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ БЕЗОПАСНОСТИ К СИСТЕМЕ УПРАВЛЕНИЯ ДОРОЖНЫМ ДВИЖЕНИЕМ

Балабанов Сергей Андреевич, студент,  
НИУ «МЭИ», Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14, стр. 1,  
BalabanovSA@mpei.ru

**Аннотация.** В работе проводится анализ функционирования автоматизированной системы управления дорожным движением с целью исследования возможностей предотвращения дорожно-транспортных происшествий с участием автомобилей и людей. Описание переходов этой системы из одного стационарного состояния в другое осуществляется с помощью марковской модели в виде системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. По результатам решения системы линейных дифференциальных уравнений задаются требования безопасности к элементам автоматизированной системы.

**Ключевые слова:** автоматизированная система управления дорожным движением, дорожно-транспортное происшествие, марковская модель, эффективность функционирования, общее решение системы линейных дифференциальных уравнений, начальные и граничные условия, геометрическое место точек, требования безопасности.

## PHYSICAL AND MATHEMATICAL SUBSTANTIATION OF SAFETY REQUIREMENTS FOR A TRAFFIC MANAGEMENT SYSTEM

Balabanov Sergey A., student,  
MPEI, 14, p. 1, Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russia,  
BalabanovSA@mpei.ru

**Abstract.** The paper analyzes the functioning of an automated traffic management system in order to study the possibilities of preventing road accidents involving cars and people. The description of the transitions of this system from one stationary state to another is carried out using the Markov model in the form of a system of linear differential equations of the first order. Based on the results of solving a system of linear differential equations, safety requirements for the elements of an automated system are set.

**Key words:** automated traffic control system, traffic accident, Markov model, operational efficiency, general solution of a system of linear differential equations, initial and boundary conditions, geometric location of points, safety requirements.

**Введение.** Обеспечение безопасности дорожного движения – одна из приоритетных по степени важности стоящих в настоящее время перед государством задач. Исходы дорожно-транспортных происшествий (ДТП) являются, как правило, тяжёлыми и связаны с гибелью людей, утратой или разрушением транспортных средств, а также крупными финансовыми затратами, необходимыми для ликвидации последствий аварий. В данном научном труде предлагается подход к оценке возможных рисков, связанных с безопасностью дорожного движения, а также рассматривается возможность минимизации данных рисков.

Поскольку риски носят случайный характер, то для их оценки предлагается использование методов марковской теории оценивания случайных процессов, описывающей переходы формализованной модели автоматизированной системы управления дорожным движением из одного стационарного состояния в другие стационарные состояния [1, с. 134].

**Постановка задачи.** Под автоматизированной системой управления дорожным движением (АСУДД) понимается комплекс программно-технических средств, систем и мероприятий, направленных на обеспечение безопасности дорожного движения, снижение транспортных задержек, улучшение параметров улично-дорожной сети и улучшение экологической обстановки.

Считается, что АСУДД находится в исправном состоянии, если в исправном состоянии находятся все её элементы. При отказе или снижении эффективности функционирования хотя бы одного из её элементов возможно возникновение следующих ситуаций:

- отказ или снижение эффективности функционирования (ЭФ) АСУДД из-за ошибок водителей;

- отказ или снижение ЭФ АСУДД из-за неисправностей транспортных средств;
- отказ или снижение ЭФ АСУДД из-за неисправностей дорожной инфраструктуры.

Процессы переходов АСУДД из одного стационарного состояния в другие стационарные состояния обладают свойством марковских процессов. Модель возможных переходов АСУДД из одного стационарного состояния в другие представлена на рисунке 1.

На рисунке 1 обозначено:

- состояние «1» – желаемое состояние АСУДД, при котором обеспечивается нормальное функционирование всех её элементов;
- состояние «2» – состояние АСУДД, при котором наблюдается снижение её ЭФ по вине водителей;
- состояние «3» – состояние, когда нарушено нормальное функционирование АСУДД по причине связанной с ошибками водителей;

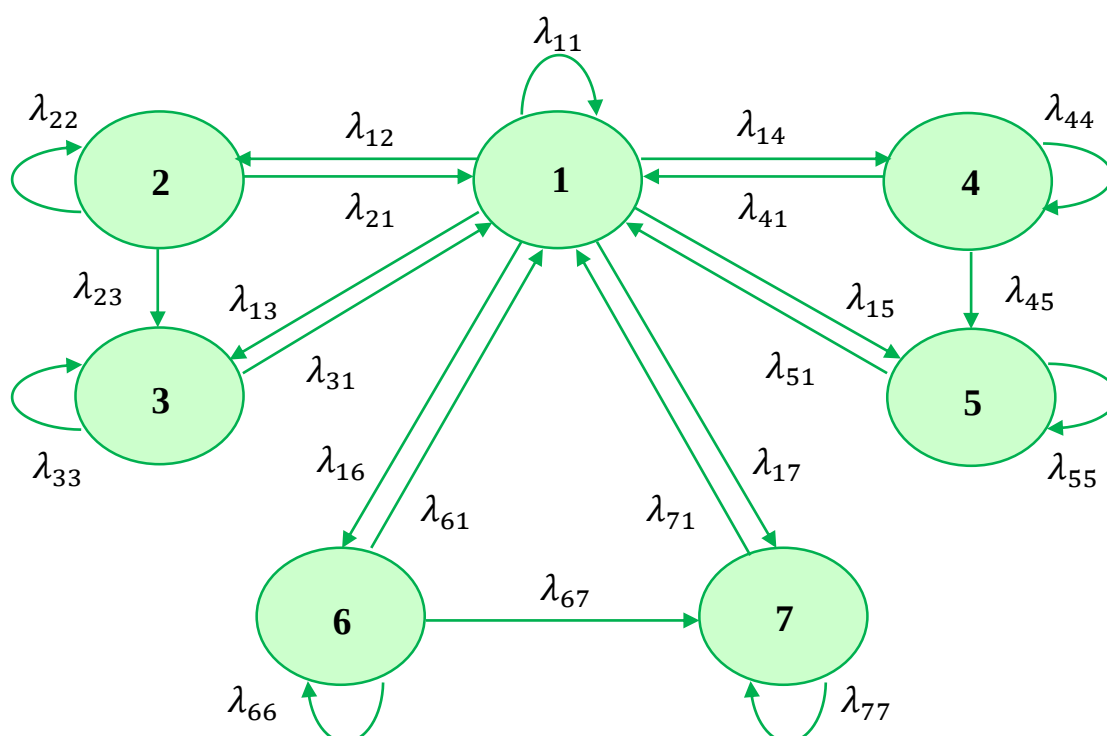


Рис. 1. Модель переходов АСУДД из одного состояния в другое

- состояние «4» – состояние АСУДД, при котором происходит снижение её ЭФ по причине, связанной техническим состоянием транспортных средств;
- состояние «5» – состояние, когда нарушено нормальное функционирование АСУДД по причине связанной с возникновением неисправностей транспортных средств, находящихся в рейсах;
- состояние «6» – состояние АСУДД, при котором наблюдается снижение её ЭФ по вине обслуживающего персонала, занимающегося обслуживанием дорожной инфраструктуры и обеспечением управления дорожным движением;
- состояние «7» – состояние, когда нарушено нормальное функционирование АСУДД из-за ошибок обслуживающего персонала, занимающегося обслуживанием дорожной инфраструктуры и обеспечением управления дорожным движением;
- $\lambda_{ij}, i, j = \overline{1,7}$ , – величины интенсивностей переходов АСУДД из стационарного состояния  $i$  в стационарное состояние  $j$ .

С математической точки зрения модель переходов АСУДД из одного стационарного состояния в другое, достаточно полно и подробно описывается системой линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) вида (1) [2, с. 24]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{11} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) + \lambda_{41} \cdot p_4(t) + \lambda_{51} \cdot p_5(t) + \lambda_{61} \cdot p_6(t) + \lambda_{71} \cdot p_7(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{22} \cdot p_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{33} \cdot p_3(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{14} \cdot p_1(t) + \lambda_{44} \cdot p_4(t) \\ \frac{dp_5(t)}{dt} = \lambda_{15} \cdot p_1(t) + \lambda_{45} \cdot p_4(t) + \lambda_{55} \cdot p_5(t) \\ \frac{dp_6(t)}{dt} = \lambda_{16} \cdot p_1(t) + \lambda_{66} \cdot p_6(t) \\ \frac{dp_7(t)}{dt} = \lambda_{17} \cdot p_1(t) + \lambda_{67} \cdot p_6(t) + \lambda_{77} \cdot p_7(t) \end{array} \right. . \quad (1)$$

Стационарные вероятности  $p_i$ ,  $i = \overline{1,7}$ , входящие в СЛДУ (1) в момент времени  $t = 1$  [y.e.] определяются с помощью (2):

$$\begin{cases} p_1 = 1 - \lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} - \lambda_{15} - \lambda_{16} - \lambda_{17} \\ p_2 = \lambda_{12} \\ p_3 = \lambda_{13} \\ p_4 = \lambda_{14} \\ p_5 = \lambda_{15} \\ p_6 = \lambda_{16} \\ p_7 = \lambda_{17} \end{cases} . \quad (2)$$

Интенсивности переходов АСУДД  $\lambda_{1j}$ ,  $j = \overline{1,7}$ , определяются путём решения СЛАУ:

$$\begin{cases} -\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} - \lambda_{15} - \lambda_{16} - \lambda_{17} = (R_{\text{вс}} + R_{\text{и}} - P_{\text{ош}}) - 2 \\ \lambda_{12} + \lambda_{13} = P_{\text{ош}} \\ \lambda_{14} + \lambda_{15} = 1 - R_{\text{ТС}} \\ \lambda_{16} + \lambda_{17} = 1 - R_{\text{и}} \end{cases} . \quad (3)$$

относительно неизвестных  $\lambda_{1j}$ ,  $j = \overline{1,7}$ .

Из системы уравнений (3) видно, что на суммы интенсивностей  $\lambda_{12} + \lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14} + \lambda_{15}$  и  $\lambda_{16} + \lambda_{17}$  накладываются определённые ограничения.

При наличии возможностей улучшения показателей  $P_{\text{ош}}$ ,  $R_{\text{ТС}}$  или  $R_{\text{и}}$  возможно снижение значений сумм  $\lambda_{12} + \lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14} + \lambda_{15}$  и  $\lambda_{16} + \lambda_{17}$ . Это эквивалентно повышению вероятности  $p_1$  нахождения всей АСУДД в желаемом состоянии «1». Рассмотрим задачу исследования влияния характеристик АСУДД  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{15}$ ,  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  на динамику процесса нахождения системы в желаемом состоянии «1». Формальная постановка задачи исследования сводится к следующему [3, с. 80]. На основании математической модели (1) в начальный момент времени  $t_0 = 0$  АСУДД работоспособна и нормально функционирует с вероятностью:

$$p_1 = p_{10} \cdot \lambda_{11}. \quad (4)$$

При начальном условии  $p_{10} = 1$  выражение (4) преобразовывается к виду:

$$p_1 = \lambda_{11}. \quad (5)$$

В процессе функционирования в произвольный момент времени  $t$ , отличный от  $t_0$ , вероятность нахождения АСУДД в желаемом состоянии «1» определяется с помощью выражения (6):

$$p_1(t) = e^{\lambda_{11} \cdot t}. \quad (6)$$

В соответствии с (4):

$$e^{\lambda_{11} \cdot t} \approx 1 + \lambda_{11} \cdot t,$$

поэтому выражение (6) записывается в виде линейной функции:

$$p_1(t) \approx 1 + \lambda_{11} \cdot t, \quad (7)$$

в которой постоянный коэффициент  $\lambda_{11}$  определяется как тангенс угла наклона прямой графика функции (7) по отношению к оси абсцисс  $t$ :

$$\lambda_{11} = tg\beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}}, \quad (8)$$

если речь идёт о безошибочных действиях водителей;

$$\lambda_{11} = tg\beta = \frac{\lambda_{16}}{\lambda_{17}}, \quad (9)$$

если речь идёт о безотказности инфраструктуры.

Чтобы избавиться от переменной  $t$  вводятся граничные условия:

- процесс функционирования АСУДД наблюдается в течение условного единичного интервала времени продолжительностью  $t = 1$  [у.е.]. На практике единичный интервал времени может быть эквивалентен суткам;

- процесс функционирования АСУДД в течение единичного интервала времени осуществляется в условиях заведомо исправного транспортного средства. В связи с этим значение  $\lambda_{11}$  принимается равным  $\lambda_{11} = -(\lambda_{12} + \lambda_{13})$  при заведомо исправном транспортном средстве и нормально функционирующей инфраструктуре, либо  $\lambda_{11} = -(\lambda_{16} + \lambda_{17})$  при заведомо исправном транспортном средстве и безошибочных действиях водителя [4, с. 39].

С математической точки зрения отрицательное значение интенсивности переходов  $\lambda_{11}$  говорит о том, что прямая (8) и ось абсцисс  $t$

пересекаются под углом, значение которого находится в пределах  $\beta = \frac{\pi}{2} \dots \pi$ .

С учётом граничных условий вероятность  $p_1$  в момент времени  $t = 1$  в общем виде определяется с помощью выражения

$$p_1 \approx 1 - |\lambda_{11}|. \quad (10)$$

Чтобы ответить на вопрос относительно всех пар значений  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{15}$ ,  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$ , удовлетворяющих ограничению (3), необходимо задаться дополнительными к (3) граничными условиями.

Задача исследования влияния характеристик системы  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{15}$ ,  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  на динамику процесса нахождения АСУДД в желаемом состоянии «1» заключается в установлении факта наличия разницы в степени влияния различных пар показателей  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{15}$ ,  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  на вероятность  $p_1$  нахождения системы в состоянии «1» и в оценке разницы в степени такого влияния [5, с. 14].

**Решение задачи.** Задача исследования сводится к решению системы уравнений (1) при наличии дополнений к граничным условиям вида:

$$\begin{cases} \lambda_{12} = \lambda_{13} \\ \lambda_{14} = \lambda_{15}, \\ \lambda_{16} = \lambda_{17} \end{cases} \quad (11)$$

означающими равенство  $tg\beta = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{13}} = \frac{\lambda_{14}}{\lambda_{15}} = \frac{\lambda_{16}}{\lambda_{17}} = -1$ , и определению вероятности (10).

## Пример

### Исходные данные:

- а) вероятность ошибочных действий водителя  $P_{\text{ош}} = 0.01$ ;
- б) вероятность безотказной работы транспортного средства  $R_{\text{ТС}} = 0.98$ ;
- в) вероятность безотказной работы инфраструктуры  $R_{\text{и}} = 0.97$ .

Требуется: определить стационарные вероятности  $p_i$ ,  $i = \overline{1,7}$  нахождения АТС в состояниях «1» – «7» и интенсивности переходов АСУДД из одних видов стационарных состояний в другие  $\lambda_{ij}$ ,  $i, j = \overline{1,7}$ .

Решение:

1. СЛАУ (3) запишется в виде:

$$\begin{cases} -\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} - \lambda_{15} - \lambda_{16} - \lambda_{17} = -0.06 \\ \lambda_{12} + \lambda_{13} = 0.01 \\ \lambda_{14} + \lambda_{15} = 0.02 \\ \lambda_{16} + \lambda_{17} = 0.03 \end{cases}.$$

2. Из анализа (3) следует, что первое уравнение системы представляет собой сумму последующих трёх уравнений. Поэтому СЛАУ (3) удобно преобразовать к виду:

$$\begin{cases} \lambda_{12} + \lambda_{13} = 0.01 \\ \lambda_{14} + \lambda_{15} = 0.02. \\ \lambda_{16} + \lambda_{17} = 0.03 \end{cases}$$

Результаты решения СЛАУ представлены на рисунках 2, 3, 4.

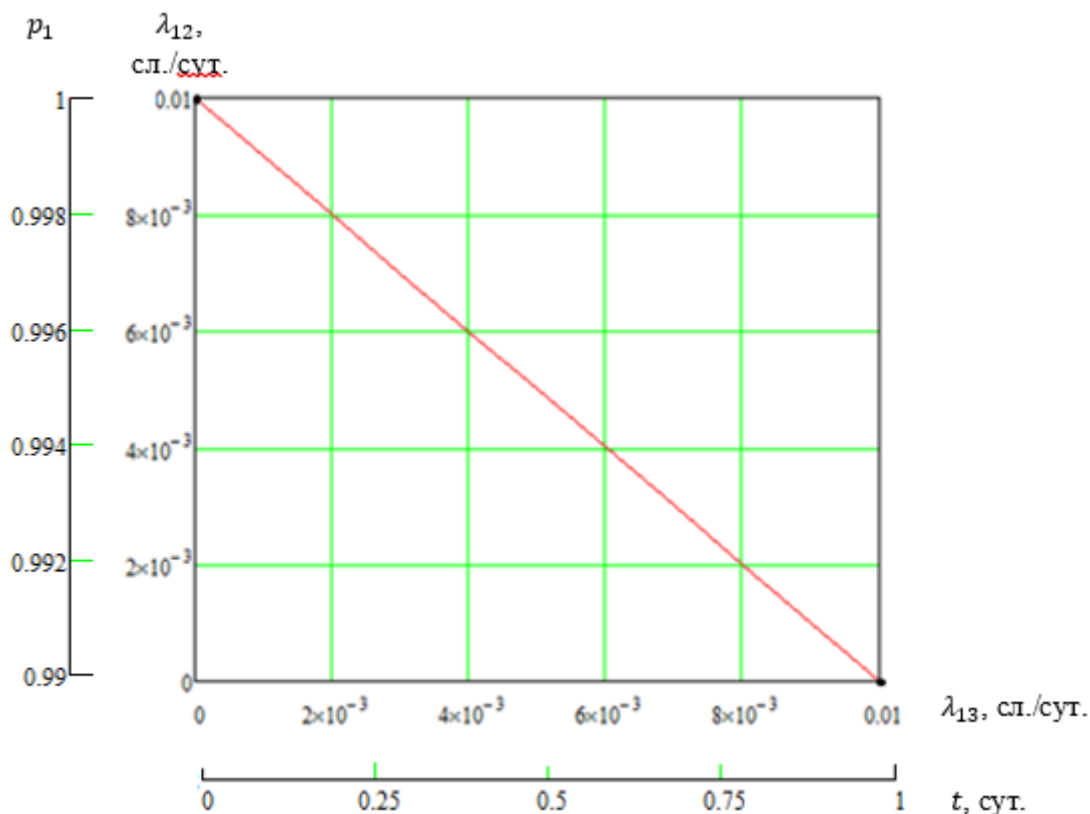


Рис. 2. Графики зависимостей  $p_1(t)$  и  $\lambda_{12}(\lambda_{13})$

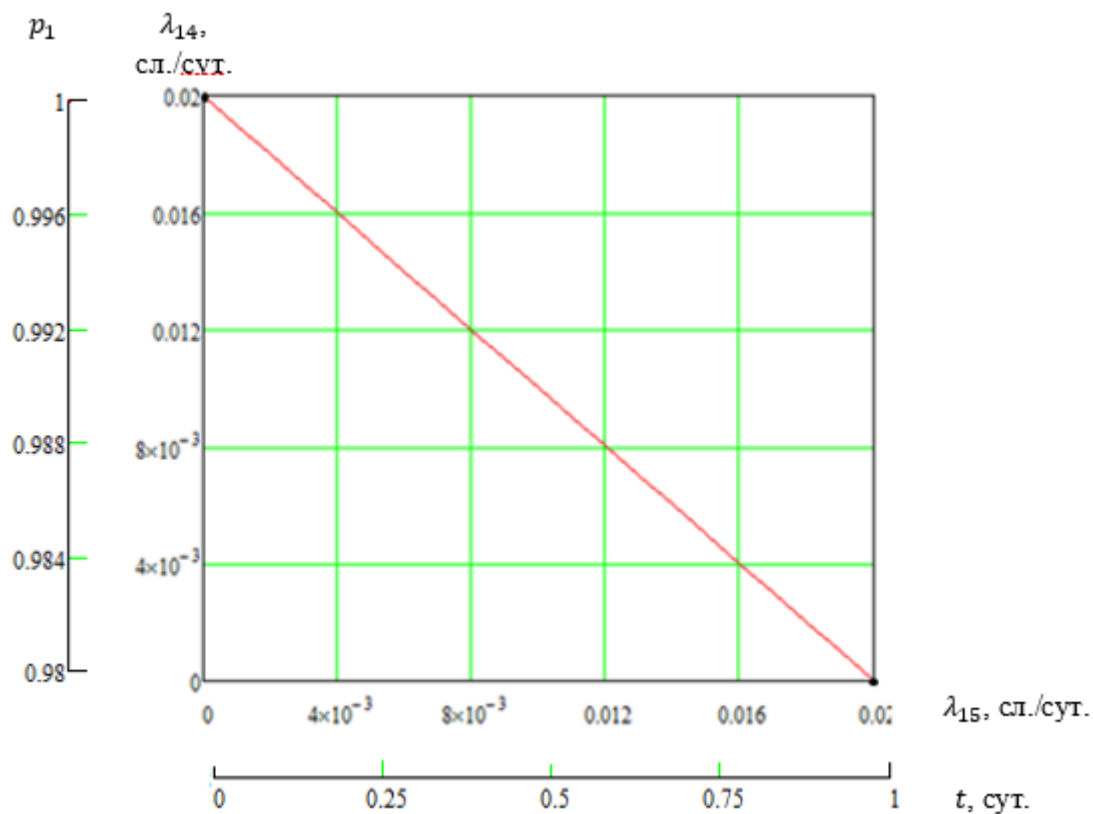


Рис. 3. Графики зависимостей  $p_1(t)$ ,  $\lambda_{14}(\lambda_{15})$

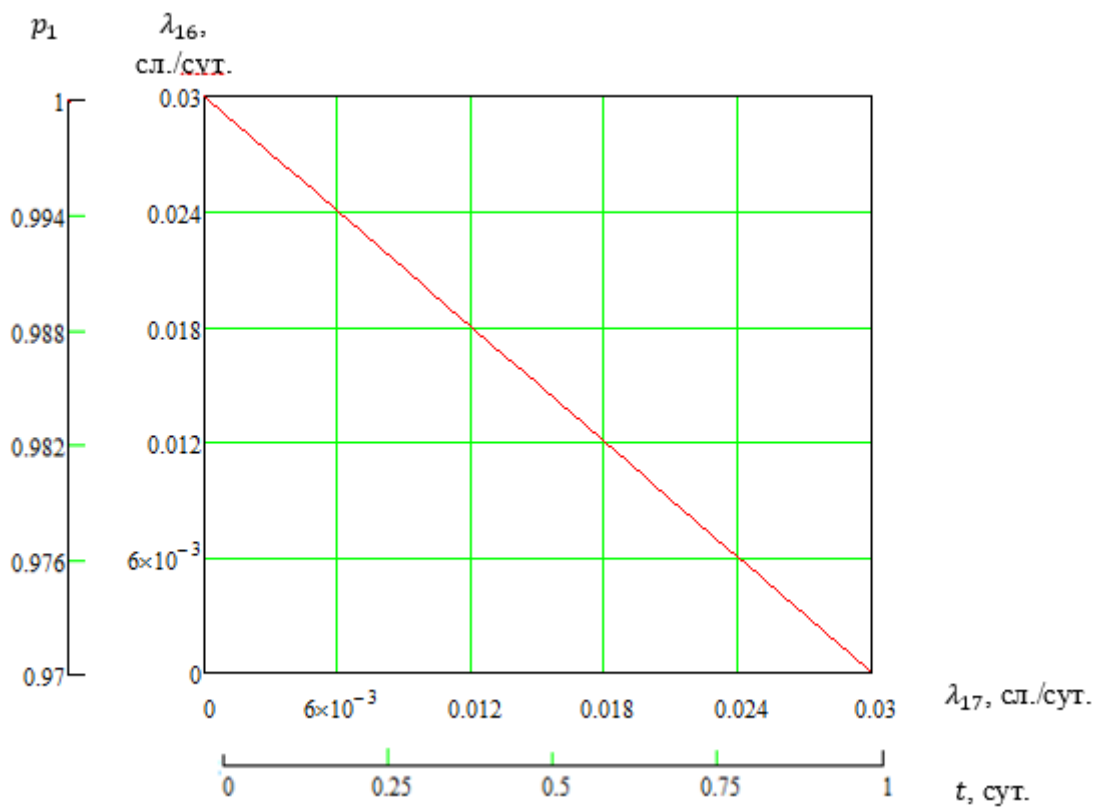


Рис. 4. Графики зависимостей  $p_1(t)$  и  $\lambda_{16}(\lambda_{17})$

Анализ зависимостей показывает потенциальные требования к надежности основных элементов АСУДД. Численное значение вероятности  $p_1$  нахождения АСУДД в желаемом состоянии «1» соответствует значению вероятности безотказной работы её элементов. По графикам, изображённым на рисунках 2 – 4 определяются требуемые значения вероятности безотказной работы элементов АСУДД.

Показатель безотказности в виде вероятности безотказной работы можно пересчитать в другие показатели, например, в параметр потока отказов  $\omega$  по формуле [6, с. 20]

$$\omega = -\frac{1}{t} \cdot \ln R,$$

учитывая, что длительность промежутка времени  $t$  составляет одни сутки.

Таким образом, задача исследования влияния вероятностных характеристик  $\lambda_{12}, \lambda_{13}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  на динамику процесса нахождения АСУДД в желаемом состоянии «1» решена. Выявлен факт неодинакового влияния различных пар значений  $\lambda_{12}$  и  $\lambda_{13}$ ,  $\lambda_{14}$  и  $\lambda_{15}$ , а также  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  из множества допустимых решений на вероятность  $p_1$  нахождения АСУДД в состоянии «1». Найден вариант дополнения к граничным условиям, обеспечивающий рациональные показатели  $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{14}, \lambda_{15}, \lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  функционирования АСУДД в целом. Учёт значений таких показателей необходим в процессе формирования требований к нормативным показателям безопасности элементов АСУДД.

### Выводы

1. Рассчитаны стационарные вероятности пребывания АСУДД в различных состояниях  $p_i$ ,  $i = \overline{1,7}$ , и интенсивности переходов системы из состояния «1» в другие стационарные состояния  $\lambda_{1j}$ ,  $j = \overline{2,7}$ .
2. Выявлен факт неодинакового влияния различных пар значений  $\lambda_{12}$  и  $\lambda_{13}$ , а также  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  из множества допустимых решений на вероятность  $p_1$  нахождения АСУДД в желаемом состоянии. Найден вариант

дополнения к граничным условиям, обеспечивающий рациональные показатели  $\lambda_{11}$ ,  $\lambda_{12}$ ,  $\lambda_{14}$ ,  $\lambda_{15}$ ,  $\lambda_{16}$  и  $\lambda_{17}$  функционирования всей АСУДД в целом.

### Список литературы

1. Барышова, М.В. Исследование количества выпадаемых осадков в Центральном регионе Российской Федерации / М.В. Барышова, В. С. Белый // Лучшая научная статья 2019: сборник статей XXVIII Международного научно-исследовательского конкурса, Пенза, 30 сентября 2019 года. – Пенза: "Наука и Просвещение" (ИП Гуляев Г.Ю.), 2019. – С. 129-135.
2. Белый, В.С. К вопросу о синтезе смешанной системы эксплуатации технического объекта / В.С. Белый, А.Б. Кузьмин, В.Ю. Шишкин // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2002. – № 35. – С. 24.
3. Белый, В.С. Исследование водопоглощения пенополимерминеральной изоляции на трубе в условиях затопления / В.С. Белый, А.М. Мишина // Коммунальный комплекс России. – 2018. – № 3. – С. 80..
4. Оценка возможностей сокращения объема испытаний пенополимерминеральной изоляции труб на предмет исходного влагосодержания / В.С. Белый, С.В. Брыль, А.М. Мишина, М.С. Зверьков // Экология и строительство. – 2018. – № 2. – С. 35-43.
5. Белый, В.С. Применение рядов Фурье для прогнозирования технического состояния здания / В.С. Белый, Н.Н. Адамушко // Экология и строительство. – 2015. – № 1. – С. 11-14.
6. Белый, В.С. Применение многомерной математической модели для решения задачи оптимизации стратегии технического обслуживания сложных технических систем / В.С. Белый // Техника и технологии, политика и экономика: проблемы и перспективы: Материалы IV Международной научно-практической конференции, Коломна, 30 апреля 2017 года. – Коломна: Коломенский институт (филиал) федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования "Московский политехнический университет", 2017. – С. 11-21.

### References

1. Baryshova M.V., Bely V.S. Luchshaya nauchnaya stat'ya 2019: sbornik statey XXVIII Mezhdunarodnogo nauchno-issledovatel'skogo konkursa, Penza, "Nauka i Prosveshcheniye" (IP Gulyayev G.YU.), 2019, pp. 129-135.

2. Bely V.S., Kuzmin A.B., Shishkin V.Y. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoy aviatsii*, 2002, no. 35, p. 24.
3. Bely V.S., Mishina A.M. *Kommunal'nyy kompleks Rossii*, 2018, no. 3, p. 80.
4. Bely V.S., Bryl S.V., Mishina A.M., Zverkov M.S. *Ekologiya i stroitel'stvo*, 2018, no. 2, pp. 35-43.
5. Bely V.S., Adamushko N.N. *Ekologiya i stroitel'stvo*, 2015, no. 1, pp. 11-14.
6. Bely V.S., *Materialy IV Mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii*, Kolomna, Kolomenskiy institut (filial) federal'nogo gosudarstvennogo byudzhetnogo obrazovatel'nogo uchrezhdeniya vysshego obrazovaniya "Moskovskiy politekhnicheskii universitet", 2017, pp. 11-21.

Рецензент: А.Ф. Смык, д-р физ.-мат. наук, доц., МАДИ