

УДК 531.8

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ВОЗНИКНОВЕНИЯ НЕИСПРАВНОСТЕЙ В ЛЕГКОВЫХ АВТОМОБИЛЯХ

Прозоров Александр Павлович, студент,  
НИУ «МЭИ», Россия, 111250, Москва, Красноказарменная ул., д. 14, стр. 1,  
ProzorovAP@mpei.ru

**Аннотация.** В работе приводится математическое описание физических процессов изменения технического состояния (ТС) легкового автомобиля, разработанное с использованием марковского метода анализа процессов его функционирования в процессе эксплуатации автомобиля. Целью исследований является получение количественных оценок показателей безотказности легкового автомобиля и его подсистем путём решения системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка при заданных начальных условиях.

**Ключевые слова:** легковой автомобиль, техническое состояние, граф состояний, система линейных дифференциальных уравнений первого порядка, эффективность функционирования, отказ, неисправное состояние, интенсивность переходов из состояния в состояние, вероятность отказа, вероятность нахождения в стационарном состоянии, показатель безотказности.

## MATHEMATICAL DESCRIPTION OF THE PHYSICAL PROCESSES OF CAR MALFUNCTIONS

Prozorov Alexander P., student,  
MPEI, 14, p. 1, Krasnokazarmennaya str., Moscow, 111250, Russia,  
ProzorovAP@mpei.ru

**Abstract.** The paper provides a mathematical description of the physical processes of changing the technical condition (TS) of a passenger car, developed using the Markov method of analyzing the processes of its functioning in the process of using the car for its intended purpose. The aim of the research is to obtain quantitative estimates of the reliability indicators of a passenger car and its subsystems by solving a system of linear differential equations of the first order under given initial conditions.

**Key words:** passenger car, technical condition, graph of states, system of linear differential equations of the first order, efficiency of functioning, failure, faulty condition,

intensity of transitions from state to state, probability of failure, probability of being in a stationary state, reliability indicator.

**Введение.** В данном научном труде предлагается математическое описание физических процессов изменения ТС легкового автомобиля в части его безотказности по заранее известным значениям показателей безотказности его подсистем. В качестве подсистем легкового автомобиля рассматриваются:

- двигатель в комплекте с системами питания, охлаждения, смазки и электроснабжения;
- шасси, включающее в себя трансмиссию, ходовую часть и механизмы управления;
- кузов.

Поскольку физические процессы возникновения неисправностей и отказов подсистем легкового автомобиля носят случайный характер, для их моделирования предлагается использовать методы марковской теории оценивания случайных процессов, описывающих переходы подсистем автомобиля из работоспособного вида технического состояния в неработоспособный [1, с. 134].

**Постановка задачи.** Легковой автомобиль представляет собой сложную техническую систему (СТС), которая может находиться как в стационарном, так и в переходном состояниях. Считается, что легковой автомобиль нормально функционирует, если нормально функционируют его подсистемы. Под эффективностью функционирования (ЭФ) легкового автомобиля понимается степень его соответствия своему назначению. Критерием отказа легкового автомобиля является любое событие, свершение которого приводит к невозможности продолжения движения. Критерием снижения ЭФ автомобиля является любое событие, свершение которого приводит к ухудшению качества выполнения им функций в

соответствии с предназначением при сохранении возможности продолжения движения. При нарушении нормального функционирования любой из подсистем возможно возникновение следующих ситуаций:

- отказ (снижение ЭФ) автомобиля по причине нарушения работоспособности двигателя или его систем;
- отказ (снижение ЭФ) автомобиля по причине нарушения работоспособности шасси;
- отказ (снижение ЭФ) автомобиля по причине нарушения работоспособности кузова.

Графическая модель возможных переходов легкового автомобиля из работоспособного вида состояния в неработоспособные виды состояний представлена на рисунке 1.

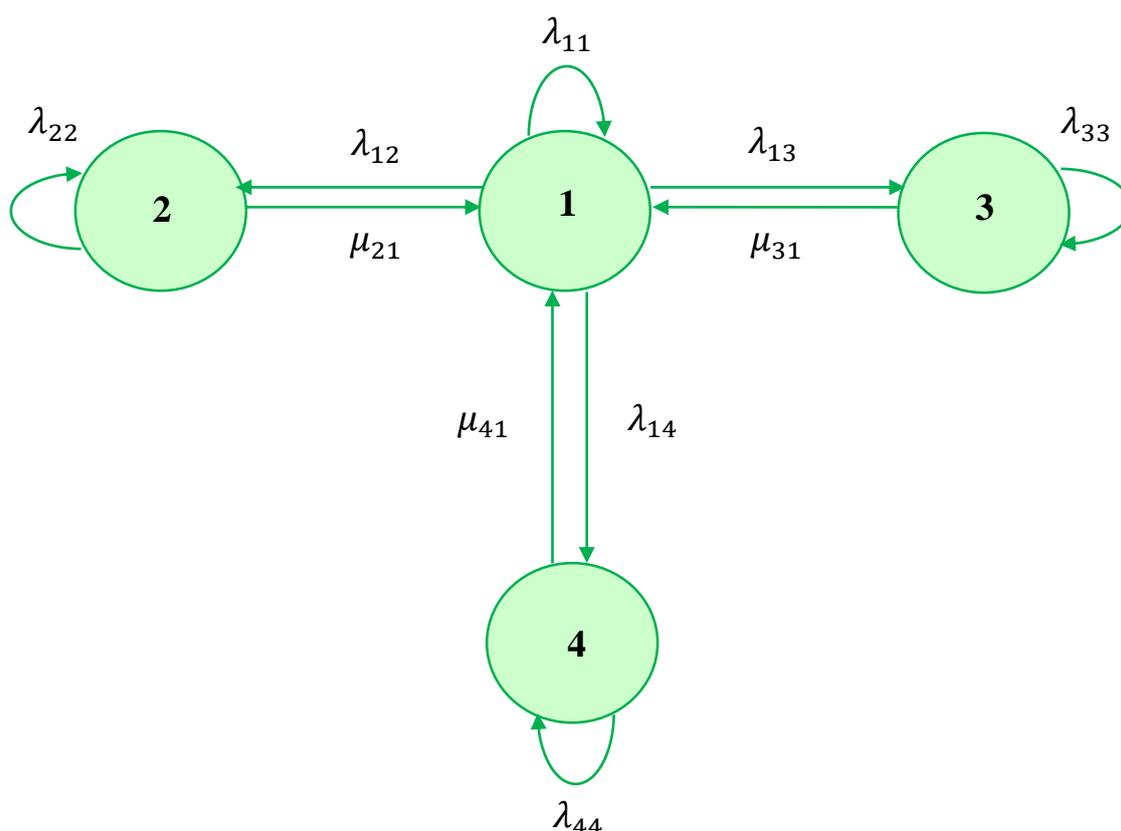


Рис. 1. Графическая модель переходов

На рисунке 1 обозначено:

- состояние «1» – желаемое состояние легкового автомобиля, при котором обеспечивается нормальное функционирование всех его подсистем;
- состояние «2» – состояние автомобиля, при котором наблюдается снижение его ЭФ или отказ по причине нарушения работоспособности двигателя или его систем;
- состояние «3» – состояние автомобиля, при котором наблюдается снижение его ЭФ или отказ по причине нарушения работоспособности элементов шасси;
- состояние «4» – состояние автомобиля, при котором наблюдается снижение его ЭФ или отказ по причине нарушения работоспособности элементов кузова;
- $\lambda_{ij}, i, j = \overline{1,4}$ , – величины интенсивностей переходов легкового автомобиля из стационарного состояния  $i$  в стационарное состояние  $j$  (интенсивностей отказов);
- $\mu_{ji}, i, j = \overline{1,4}$ , – величины интенсивностей переходов системы из стационарного состояния  $j$  в стационарное состояние  $i$  (интенсивностей восстановления).

Формально, согласно [2, с. 24], модель переходов системы из одного стационарного состояния в другое, может описываться системой линейных дифференциальных уравнений (СЛДУ) первого порядка вида (1)

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{11} \cdot p_1(t) + \mu_{21} \cdot p_2(t) + \mu_{31} \cdot p_3(t) + \mu_{41} \cdot p_4(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{22} \cdot p_2(t) + \mu_{32} \cdot p_3(t) + \mu_{42} \cdot p_4(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{33} \cdot p_3(t) + \mu_{43} \cdot p_4(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{14} \cdot p_1(t) + \lambda_{24} \cdot p_2(t) + \lambda_{34} \cdot p_3(t) + \lambda_{44} \cdot p_4(t) \end{cases} \quad (1)$$

В векторно-матричной форме СЛДУ (1) запишется так:

$$\begin{pmatrix} \frac{dp_1(t)}{dt} \\ \frac{dp_2(t)}{dt} \\ \frac{dp_3(t)}{dt} \\ \frac{dp_4(t)}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \end{pmatrix}^T \times \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \mu_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} & \lambda_{24} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \lambda_{33} & \lambda_{34} \\ \mu_{41} & \mu_{42} & \mu_{43} & \lambda_{44} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Матрица интенсивностей переходов изображённой на рисунке 1 модели из одних видов стационарных состояний в другие имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -\sum_{j=2}^4 \lambda_{1j} & \lambda_{12} & \lambda_{13} & \lambda_{14} \\ \mu_{21} & -(\mu_{21} + \lambda_{23}) & \lambda_{23} & 0 \\ \mu_{31} & 0 & -\mu_{31} & 0 \\ \mu_{41} & 0 & 0 & -\mu_{41} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

С учётом предположения, что в начальный момент времени функционирования  $t_0 = 0$  легковой автомобиль находится в состоянии «1», формируется начальное условие для решения системы уравнений (1)

$$P(t_0) = P(0) = p_1 = 1. \quad (4)$$

С учётом начального условия (4) СЛДУ (1) упрощается и записывается в следующем виде:

$$\begin{cases} \frac{dp_1(t)}{dt} = \lambda_{11} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) + \lambda_{41} \cdot p_4(t) \\ \frac{dp_2(t)}{dt} = \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{22} \cdot p_2(t) \\ \frac{dp_3(t)}{dt} = \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{33} \cdot p_3(t) \\ \frac{dp_4(t)}{dt} = \lambda_{14} \cdot p_1(t) + \lambda_{44} \cdot p_4(t) \end{cases}. \quad (5)$$

Требуется определить стационарные вероятности  $p_i, i = \overline{1,4}$ , нахождения легкового автомобиля в состояниях «1» – «4».

**Решение задачи.** Для нахождения стационарных вероятностей  $p_i, i = \overline{1,4}$ , система уравнений (5) преобразовывается к виду

$$\begin{cases} \lambda_{11} \cdot p_1(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) + \lambda_{31} \cdot p_3(t) + \lambda_{41} \cdot p_4(t) = 0 \\ \lambda_{12} \cdot p_1(t) + \lambda_{22} \cdot p_2(t) = 0 \\ \lambda_{13} \cdot p_1(t) + \lambda_{23} \cdot p_2(t) + \lambda_{33} \cdot p_3(t) = 0 \\ \lambda_{14} \cdot p_1(t) + \lambda_{44} \cdot p_4(t) = 0 \end{cases}. \quad (6)$$

Решения системы уравнений (6), соответствующие моменту времени  $t = 1$  [у.е.] и с учётом начального условия (4) следующие:

$$\begin{cases} p_1 = 1 - \lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} \\ p_2 = \lambda_{12} \\ p_3 = \lambda_{13} \\ p_4 = \lambda_{14} \end{cases} \quad (7)$$

Для проверки правильности решения обязательно выполнение контрольного условия [3, с. 80]

$$\sum_{i=1}^4 p_i = 1. \quad (8)$$

Изменения величин интенсивностей переходов  $\lambda_{1j}, j = \overline{1,4}$  влияют на значение вероятности нахождения автомобиля в начальном состоянии  $p_1$ . При увеличении значения любой из величин  $\lambda_{1j}$  значение вероятности  $p_1$  будет уменьшаться, что нежелательно [4, с. 37]. Значения вероятностей нахождения автомобиля в том или ином стационарном состоянии в значительной степени определяется значениями вероятностей отказов двигателя  $F_D$ , шасси  $F_{Ш}$  и кузова  $F_K$ , автомобиля.

Вероятность нахождения легкового автомобиля в состояниях «2», «3» и «4» определяются как  $F_D, F_{Ш}$  и  $F_K$ , соответственно. Поэтому интенсивности переходов  $\lambda_{1j}, j = \overline{1,4}$ , определяются путём решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) вида

$$\begin{cases} -\lambda_{12} - \lambda_{13} - \lambda_{14} = -F_D - F_{Ш} - F_K \\ \lambda_{12} = F_D \\ \lambda_{13} = F_{Ш} \\ \lambda_{14} = F_K \end{cases} \quad (9)$$

относительно неизвестных  $\lambda_{1j}, j = \overline{1,4}$ .

При умножении на «-1» левой и правой части первого уравнения системы уравнений (9) и, учитывая, что величина интенсивности перехода, согласно [5, с. 11],

$$\lambda_{11} = -\sum_{j=2}^4 \lambda_{1j}, \quad (10)$$

получается векторно-матричная форма записи системы уравнений (9)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{12} \\ \lambda_{13} \\ \lambda_{14} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - (F_D + F_{Ш} + F_K) \\ F_D \\ F_{Ш} \\ F_K \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Решениями системы (11) являются искомые:

- условная вероятность нахождения автомобиля в состоянии «1»;
- интенсивности переходов автомобиля из начального состояния «1» в состояния «2» – «4».

### Пример

#### Исходные данные:

Вероятности отказов подсистем автомобиля в течение временного интервала  $(0, t)$ ,  $t = 1$  [у.е.], не превышают следующих значений:

- по двигателю:  $F_D = 0.03$ ;
- по шасси:  $F_{Ш} = 0.02$ ;
- по кузову:  $F_K = 0.01$ .

Требуется определить: стационарные вероятности  $p_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , нахождения легкового автомобиля в состояниях «1» – «4» и интенсивности переходов  $\lambda_{1j}$ ,  $j = \overline{2,4}$ , автомобиля из стационарного состояния «1» в стационарные состояния «2» – «4».

Решение СЛАУ (11) с использованием программной среды «Mathcad-15» показывает следующие результаты расчёта:

- стационарные вероятности нахождения легкового автомобиля в состояниях «1» – «4»:  $p_1 = 0.94$ ,  $p_2 = 0.03$ ,  $p_3 = 0.02$ ,  $p_4 = 0.01$ ;
- интенсивности переходов легкового автомобиля из стационарного состояния «1» в стационарные состояния «2» – «4»:  $\lambda_{12} = 0.03$  [у.е.<sup>-1</sup>],  $\lambda_{13} = 0.02$  [у.е.<sup>-1</sup>],  $\lambda_{14} = 0.01$  [у.е.<sup>-1</sup>].

### Выводы

Таким образом, в статье приводится расчёт стационарных вероятностей  $p_i$ ,  $i = \overline{1,4}$ , нахождения легкового автомобиля в состояниях

«1» – «4» и интенсивностей переходов  $\lambda_{1j}, j = \overline{2,4}$ , легкового автомобиля из стационарного состояния «1» в стационарные состояния «2» – «4»:

– стационарные вероятности нахождения легкового автомобиля в состояниях «1» – «4»:  $p_1 = 0.94, p_2 = 0.03, p_3 = 0.02, p_4 = 0.01$ ;

– интенсивности переходов легкового автомобиля из стационарного состояния «1» в стационарные состояния «2» – «4»:  $\lambda_{12} = 0.03$  [y.e.<sup>-1</sup>],  $\lambda_{13} = 0.02$  [y.e.<sup>-1</sup>],  $\lambda_{14} = 0.01$  [y.e.<sup>-1</sup>].

### Список литературы:

1. Барышова, М.В. Исследование количества выпадаемых осадков в Центральном регионе Российской Федерации / М.В. Барышова, В.С. Белый // Лучшая научная статья 2019: сборник статей XXVIII Международного научно-исследовательского конкурса, Пенза, 30 сентября 2019 года. – Пенза: "Наука и Просвещение" (ИП Гуляев Г.Ю.), 2019. – С. 129-135.

2. Белый, В.С. К вопросу о синтезе смешанной системы эксплуатации технического объекта / В.С. Белый, А.Б. Кузьмин, В.Ю. Шишкин // Научный вестник Московского государственного технического университета гражданской авиации. – 2002. – № 35. – С. 24.

3. Белый, В.С. Исследование водопоглощения пенополимерминеральной изоляции на трубе в условиях затопления / В.С. Белый, А.М. Мишина // Коммунальный комплекс России. – 2018. – № 3. – С. 80.

4. Оценка возможностей сокращения объема испытаний пенополимерминеральной изоляции труб на предмет исходного влагосодержания / В.С. Белый, С.В. Брыль, А.М. Мишина, М.С. Зверьков // Экология и строительство. – 2018. – № 2. – С. 35-43.

5. Белый, В.С. Применение рядов Фурье для прогнозирования технического состояния здания / В.С. Белый, Н.Н. Адамушко // Экология и строительство. – 2015. – № 1. – С. 11-14.

### References

1. Baryshova M.V., Bely V.S. Luchshaya nauchnaya stat'ya 2019: sbornik statey XXVIII Mezhdunarodnogo nauchno-issledovatel'skogo konkursa, Penza, "Nauka i Prosveshcheniye" (IP Gulyayev G.YU.), 2019, pp. 129-135.

2. Bely V.S., Kuzmin A.B., Shishkin V.Y. *Nauchnyy vestnik Moskovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta grazhdanskoy aviatsii*, 2002, no. 35, p. 24.
3. Bely V.S., Mishina A.M. *Kommunal'nyy kompleks Rossii*, 2018, no. 3, p. 80.
4. Bely V.S., Bryl S.V., Mishina A.M., Zverkov M.S. *Ekologiya i stroitel'stvo*, 2018, no. 2, pp. 35-43.
5. Bely V.S., Adamushko N.N. *Ekologiya i stroitel'stvo*, 2015, no. 1, pp. 11-14.

Рецензент: А.Ф. Смык, д-р физ.-мат. наук, доц., МАДИ