

АНАЛИЗ НАДЕЖНОСТИ ОБРАТНОГО РАСЧЕТА УПРУГИХ ПАРАМЕТРОВ ДОРОЖНЫХ ОДЕЖД

Бочкарев Андрей Владимирович, канд. техн. наук, доц.,
СГТУ, Россия, 410054, Саратов, Политехническая, 77, ab2009sar@list.ru.

Аннотация. С принятием ГОСТ Р 59918-2021 оценка прочности многослойной дорожной одежды должна сопровождаться вычислением модулей упругости отдельных слоев. Источником информации для решения этой задачи является чаша прогиба поверхности дорожной одежды, определенная экспериментально с помощью установки динамического нагружения. Методика определения модулей упругости слоев по чаше прогиба регламентирована указанным стандартом и базируется на решении обратной задачи теории упругости для многослойного полупространства с использованием аппарата интегральных преобразований. Из-за отличия свойств реальной дорожной конструкции от свойств ее математической модели, экспериментально измеренная чаша прогибов может иметь малые искажения. В данной работе проанализированы источники таких искажений и оценены вероятности достоверного определения послойных модулей упругости в ходе решения обратной задачи.

Ключевые слова: нежесткие дорожные одежды, обратный расчет, модуль упругости, чаша прогибов.

RELIABILITY ANALYSIS OF BACK-CALCULATION OF ROAD PAVEMENTS ELASTIC PARAMETERS

Bochkarev Andey V., Ph.D., associate professor,
SSTU, 77, Politekhnikeskaya, Saratov, 410054, Russia, ab2009sar@list.ru

Abstract. With the adoption of GOST R 59918-2021, the assessment of the strength of multilayer pavement should be accompanied by the calculation of the elastic moduli of individual layers. The source of information for solving this problem is the cup of deflection of the pavement surface, determined experimentally using a dynamic loading facility. The method for determining the elastic moduli of the layers along the deflection bowl is regulated by the specified standard and is based on solving the inverse problem of the theory of elasticity for a multilayer half-space using the apparatus of integral transformations. Due to the difference in the properties of a real road structure from the properties of its mathematical model, the experimentally measured bowl of deflections may have small distortions. In this

work, the sources of such distortions are analyzed and the probabilities of reliable determination of layer-by-layer elastic moduli are estimated in the course of solving the inverse problem.

Key words: non-rigid pavement, reverse calculation, modulus of elasticity, bowl of deflections.

Введение

Одной из главных стратегических задач, стоящих перед отечественными дорожниками, является создание надежной и современной транспортной инфраструктуры. Для решения этой задачи в 2019 году был принят национальный проект «Безопасные и качественные автомобильные дороги», участниками которого стали 83 субъекта РФ. В 2021 году для проекта с новым названием «Безопасные качественные дороги» утвержден паспорт, соответствующий Указу Президента России от 21.07.2020 № 474 «О национальных целях развития Российской Федерации на период до 2030 года». Реализация проекта призвана способствовать достижению национальной цели «Комфортная и безопасная среда для жизни».

В мае 2022 года состоялось знаковое событие в области всего отечественного дорожного хозяйства – форум «Дорожное строительство в России», собравший представителей органов власти, строительных, проектных и подрядных организаций, научного сообщества и компаний, внедряющих новые подходы и технологии в отрасли. Одной из ключевых тем форума стал анализ эффективности реализации национального проекта «Безопасные качественные дороги», связанный с расширением применения новых импортозамещающих технологий и материалов в дорожном строительстве.

В настоящее время одной из наиболее актуальных конкретных задач является развитие неразрушающих методик оценки прочности нежестких дорожных одежд. Теоретически, такие методики основаны на

использовании нетривиального математического аппарата, включающего элементы интегральных преобразований, теории функций комплексного переменного, гармонического анализа, методы оптимизации и численного моделирования. Формально, приходится многократно решать динамическую задачу теории упругости для многослойного полупространства. Главная проблема состоит в том, что эта задача относится к классу некорректно поставленных, вследствие чего её решения чрезвычайно чувствительны к малейшим изменениям начальных данных. Данная статья посвящена обсуждению различных аспектов этой проблемы.

Схема испытания

Для определения упругих параметров слоев многослойной дорожной одежды используется установка динамического нагружения с падающим грузом [1]. Удар груза о круглый штамп, лежащий на поверхности, вызывает упругие волны, которые распространяются от места удара по всем слоям одежды. Максимальные вертикальные перемещения поверхности фиксируются датчиками прогиба, расположенными на разных расстояниях от центра приложения нагрузки. Показания этих датчиков, формирующие так называемую **чашу прогиба**, дают основную информацию для определения **модулей упругости** слоев одежды. Кроме чаши прогиба, необходимо знать следующие **исходные параметры**: толщину, коэффициент Пуассона и плотность материала каждого слоя, диаметр штампа, длительность и амплитуду импульса нагружения. Свойства материалов слоев, как правило, принимаются из проектной документации на конструкцию дорожной одежды; диаметр штампа известен из технической документации на установку динамического нагружения; параметры импульса нагружения измеряются специальными датчиками в процессе испытаний. Высоту падения груза и его массу подбирают таким образом, чтобы имитировать воздействие колеса движущегося грузового автомобиля, осевая нагрузка которого является

нормативной для исследуемой дорожной одежды. В частности, для современной дорожной конструкции с нормативной осевой нагрузкой 11.5 тонн при диаметре штампа 30 см амплитуда импульса давления должна быть близкой к 800 кПа, а длительность импульса – около 0.03 с.

Обратная задача

Задача расчета модулей упругости слоев по исходным параметрам и чаще прогиба достаточно сложна и может быть решена только при условии введения упрощающих предположений. Принятый в 2022 году ГОСТ Р 59918-2021, регламентирующий методики оценки прочности многослойных нежестких дорожных одежд, впервые вводит в систему национальных стандартов подробное описание математической модели и алгоритма решения задачи [2]. Математическая модель использует следующие упрощающие предположения:

- слои постоянной толщины располагаются поверх неограниченного полупространства, моделирующего грунтовое основание;
- материалы слоев являются однородными и линейно-упругими, а деформации материала - малыми;
- давление равномерно распределено по площади штампа, остальная поверхность дорожной одежды свободна от нагрузки;
- форма зависимости давления от времени близка к форме положительного полупериода синусоиды.

В рамках данных предположений можно считать, что перемещения каждого слоя подчиняются известным в теории упругости уравнениям Ламе [3]:

$$(\lambda + 2\mu)\text{grad div } \vec{u} - \mu \text{rot rot } \vec{u} = \rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где \vec{u} – вектор перемещений, t – время, ρ – удельная плотность и λ, μ – параметры Ламе, вычисляемые через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν :

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (2)$$

Уравнения Ламе требуется дополнить граничными условиями на поверхности, моделирующими приложенную импульсную нагрузку; условиями непрерывности напряжений и перемещений на границах между слоями, моделирующими жесткий межслойный контакт; условием нулевых перемещений на бесконечном расстоянии от центра приложения нагрузки и начальным условием в форме нулевых перемещений и скоростей точек среды в начальный момент времени.

Уравнения Ламе вместе с перечисленными условиями образуют замкнутую систему для определения чаши прогиба по известным исходным параметрам и модулям упругости слоев. Стандартным способом решения подобных пространственно-многомерных начально-граничных задач является предварительное понижение размерности с помощью интегральных преобразований с последующим проведением численного интегрирования. Основные вычислительные трудности интегрирования связаны с обеспечением аккуратного обхода пути интегрирования в комплексной плоскости, с учетом наличия особых точек и быстрых осцилляций подынтегральной функции. Тем не менее, вышеописанная задача, которую будем называть **прямой задачей**, теоретически может быть решена с произвольно высокой точностью в широком диапазоне значений исходных параметров.

Однако для обработки результатов испытаний требуется решить **обратную задачу** по определению неизвестных модулей упругости по измеренной в ходе испытаний чаше прогиба и заданным исходным значениям параметров. Обратная задача обладает признаками математически некорректно поставленной задачи [4]: во-первых, некоторым чашам не соответствует никакое распределение модулей упругости по слоям (решение задачи не существует), во-вторых, известны

чаши, которым соответствует несколько возможных распределений (решение задачи не единственное) [5]. Характерным признаком такого рода задач является высокая чувствительность решения к малым изменениям исходных параметров. Вернуть корректность постановки, то есть, обеспечить существование решения задачи, его единственность и непрерывную зависимость от исходных параметров, можно после проведения специальной процедуры регуляризации [4]. Такая процедура индивидуальна для каждого класса некорректно поставленных задач, ее разработка не проста и для задачи обратного вычисления модулей упругости, насколько нам известно из анализа литературы, пока никем не предложена.

В упомянутом ГОСТ Р 59918-2021 решение обратной задачи рекомендуется проводить методом численной оптимизации. В качестве варьируемых параметров выступают модули упругости слоев, в качестве значения целевой функции – сумма квадратов отклонений расчетной чаши от измеренной в ходе испытаний. Решением обратной задачи считается такой набор модулей упругости, который обеспечивает отличие расчетной чаши от измеренной чаши в пределах 10% по всем компонентам. Процесс решения обратной задачи сводится к многократному решению прямой задачи и останавливается по достижению заданной точности в окрестности локального минимума целевой функции. Такой подход решает только проблему “несуществования”, но не проблемы “неединственности” и высокой чувствительности решения. Сложность достоверного определения модулей упругости по заданной чаше прогиба вследствие высокой чувствительности обратной задачи есть предмет настоящего исследования.

Анализ чувствительности для трехслойной конструкции

В качестве первого примера рассмотрим трехслойную дорожную одежду, параметры которой приведены в приложении “Д” ГОСТ Р 59918-2021 (табл. 1).

Таблица 1

Номер слоя	Материал слоя	Толщина, см	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Плотность слоя, кг/м ³
1	Асфальтобетон	20	2500	0.35	2400
2	Щебень	30	350	0.35	1600
3	Грунт-суглинок	-	41	0.35	2000

При длительности импульса нагружения 0.03 с, максимальном давлении 800 кПа и диаметре нагрузочного штампа 0.3 м прямой расчет приводит к чаше прогиба w_0 , которую будем называть эталонной (табл. 2):

Таблица 2

датчик	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9
R , м	0	0.2	0.3	0.45	0.6	0.9	1.2	1.5	1.8
w_0 , мм	0.5719	0.4975	0.4579	0.4068	0.3621	0.2882	0.2313	0.1885	0.1572

Расстояния R между каждым из датчиков прогиба $d_1 - d_9$ и центром нагрузочного штампа заимствованы из п. 7.1 “Требования к средствам измерений, вспомогательным устройствам и материалам” упомянутого ГОСТа.

Процедура обратного расчета, использованная в настоящем исследовании, основана на рекомендованном ГОСТом методе оптимизации Левенберга – Марквардта; минимальные приращения аргументов и значения целевой функции, по достижении которых процесс оптимизации завершается, приняты равными 10^{-7} . Многократный запуск обратного расчета для случайно выбранных стартовых значений модулей упругости, когда исходные параметры и чаша прогибов назначались в соответствии с табл. 1 и 2, привел к следующему результату:

$$E_1 = 2500.00 \pm 0.05, \quad E_2 = 350.000 \pm 0.006, \quad E_3 = 41.0000 \pm 0.0005. \quad (3)$$

Как видим, в идеальных условиях обратный расчет восстанавливает модули упругости слоев, заданные при построении эталонной чаши, с очень высокой точностью.

Представим теперь, что установка динамического нагружения произвела измерение чаши прогиба дорожной конструкции, проектные параметры которой соответствуют таблице 2. Упругие свойства асфальтобетона существенно зависят как от температуры, так и от длительности импульса нагружения, поэтому модуль упругости асфальтобетона в проектной документации указывается для нормативных значений длительности импульса и температуры, равных 0.1 с и 10°C, соответственно. Будем считать, что измеренная чаша прогибов прошла процедуру коррекции, описанную в ГОСТ, и соответствует указанным нормативным значениям. Тем не менее, остаются десятки причин, по которым скорректированная измеренная чаша прогибов может отличаться от эталонной чаши. В частности, свойства рабочего слоя земляного полотна могут существенно отличаться от линейно-упругих; неравномерное распределение компонентов асфальтобетонной смеси по объему и возможное наличие трещин приводят к нарушению гипотезы об однородности; отклонения толщин слоев дорожной одежды от проектных значений могут достигать, в соответствии с нормативным документом СП 78.13330.2012, до 10%; давление, оказываемое установкой динамического нагружения, может быть неравномерно распределенным по площади штампа и так далее. Во-видимому, с учетом вышеизложенного, в п. 7.6.2 ГОСТ Р 59918-2021 итерации обратного расчета предлагается завершать, если отклонения расчетной чаши прогиба от заданной окажутся меньшими 10% по каждому компоненту. Это предложение выглядит вполне разумным – при возможных отклонениях исходных параметров расчета до одной десятой от их реальных значений, находить минимум целевой функции с точностью, скажем, до 3-4 значащих цифр, является пустой

тратой вычислительных ресурсов. И здесь мы сталкиваемся с другой проблемой – высокая чувствительность решения обратной задачи к исходным данным может затруднить достоверное определение модулей упругости слоев.

Предположим, что в результате сочетания различных факторов, скорректированная измеренная чаша w отличается в евклидовой норме от эталонной чаши w_0 ровно на α процентов:

$$\sqrt{\sum_{n=1}^9 \left(\frac{w_n}{w_{0n}} - 1 \right)^2} = \frac{\alpha}{100\%}, \quad (4)$$

где w_n, w_{0n} - прогибы, соответствующие датчику d_n . Варьируя случайным образом компоненты в наборе чисел $w_n, n = \overline{1,9}$, но так, чтобы соблюдалось условие (4), запустим обратный расчет для каждого такого набора w_n и вычислим модули упругости слоев $E_1 - E_3$. На рисунках 1 и 2 серые точки обозначают результаты 1000 расчетов для $\alpha = 10\%$, черные точки – результаты 500 расчетов для $\alpha = 5\%$; перекрестье пунктирных линий показывает эталонные значения модулей из табл. 1.

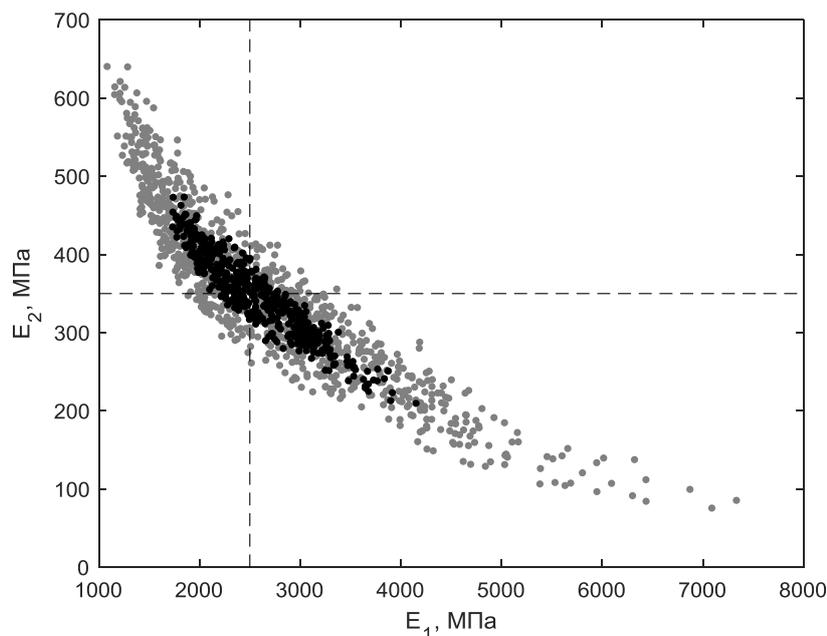


Рис. 1. Результаты обратных расчетов в осях координат (E_1, E_2) по исходным параметрам из табл. 1

Как видим, между модулем асфальтобетона E_1 и модулем щебеночного основания E_2 наблюдается значимая нелинейная корреляция, близкая к обратной пропорциональности. Это можно объяснить перераспределением несущей способности между двумя первыми слоями, необходимым для того, чтобы чаша прогиба дорожной одежды сохраняла свою форму. Между модулями E_1 и E_3 корреляция практически отсутствует, модуль земляного полотна E_3 меняется в незначительных пределах. Разброс расчетных величин E_1 и E_2 относительно эталонных значений весьма значителен – отклонения как в большую, так и в меньшую сторону превышают 2.6 раза при $\alpha = 10\%$ и 1.5 раза при $\alpha = 5\%$.

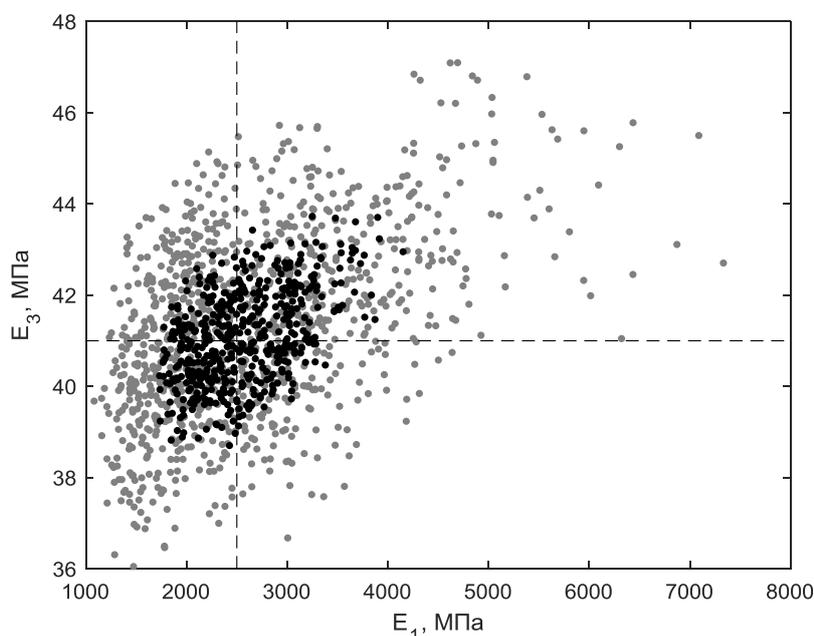


Рис. 2. Результаты обратных расчетов в осях координат (E_1, E_3) по исходным параметрам из табл. 1

Таблица 3

Кратность	1.1	1.25	1.5	2
E_1	0.17	0.39	0.68	0.95
E_2	0.25	0.52	0.80	0.95
E_3	0.94	1	1	1
E_1, E_2, E_3	0.09	0.34	0.66	0.93

Таблица 3 содержит оценки вероятностей определения эталонных модулей слоев, приведенных в табл. 1, при помощи обратного расчета по искаженной “помехами” чаше прогиба ($\alpha = 10\%$). Числа “Кратность” в первой строке определяют максимальное допустимое отношение между расчетным модулем упругости и эталонным, остальные числа – оценки вероятностей, равные относительным частотам наступления события. Так, число 0.17 во второй строке есть вероятность определить модуль асфальтобетона E_1 с погрешностью не более 10%; число 0.34 в последней строке равно вероятности определить модули всех слоев с погрешностью не более 25%. Из табл. 3 видно, что с наименьшей достоверностью определяется модуль первого слоя E_1 ; вероятность достаточно точного определения всех трех модулей, с погрешностью менее 10%, весьма невелика и равна всего 0.09; говорить о надежном определении модулей слоев не приходится – достаточно широкий диапазон $\left[\frac{E_k}{1.5}, 1.5E_k \right], k = 1, 2, 3$ содержит только $0.66 \approx \frac{2}{3}$ общего числа экспериментальных точек.

Выясним, какие именно искажения эталонной чаши приводят к максимальным погрешностям в определении модулей слоев. На рис. 3 показана эталонная чаша и примерный “коридор” искаженных чаш, соответствующим неравенству $\frac{E_1}{2500} > 2.4$ (расчетный модуль асфальтобетона превышает эталонный более чем в 2.4 раза – область точек на рис. 1, смещенных максимально вправо). На рис. 4 – соответствующий коридор чаш, соответствующих самым верхним точкам рис. 1, для которых $\frac{E_1}{2500} < \frac{1}{2}$.

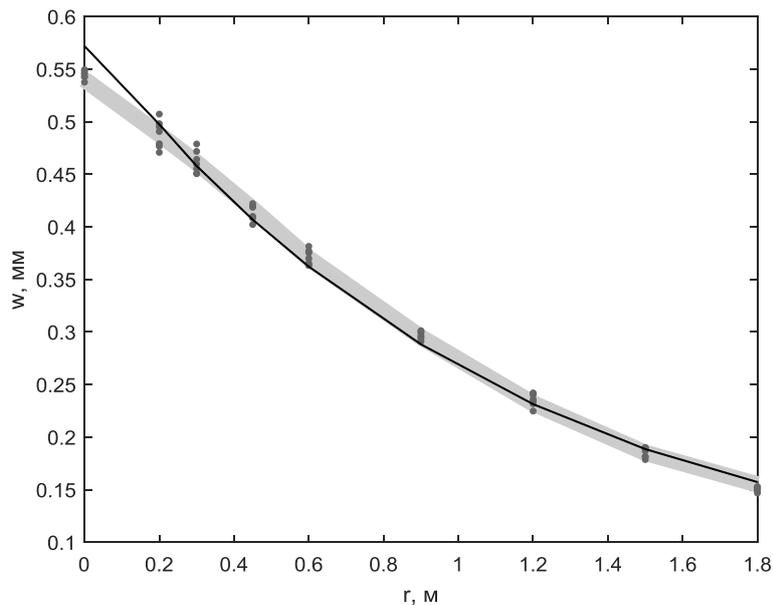


Рис. 3. Эталонная чаша и коридор искаженных чаш, приводящих к более чем двукратному завышению модуля упругости асфальтобетона

Наибольшие отличия от эталонной чаши наблюдаются в окрестности первых трех датчиков прогиба, расположенных в центре нагрузочного штампа и на расстояниях 0.2 м и 0.3 м. Таким образом, для достоверного определения модулей слоев, первые три компоненты чаши должны быть измерены с максимально возможной точностью.

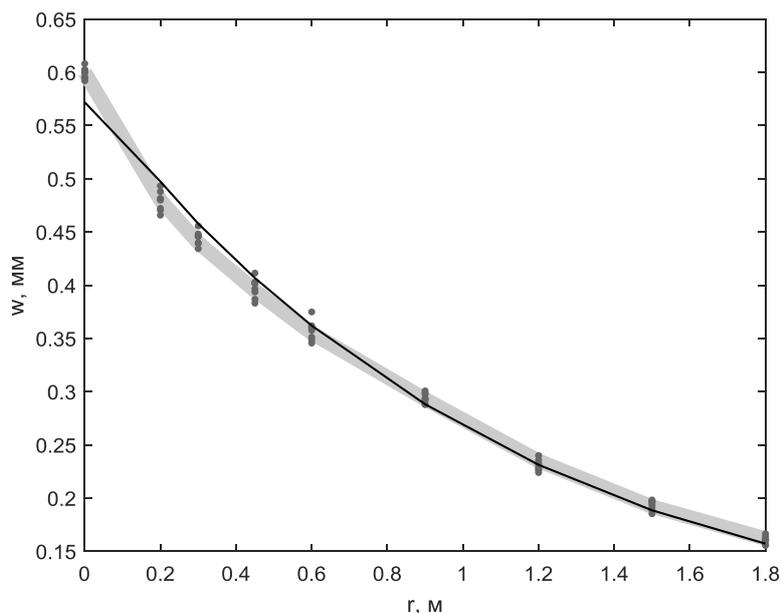


Рис. 4. Эталонная чаша и коридор искаженных чаш, приводящих к двукратному занижению модуля упругости асфальтобетона

Анализ чувствительности для четырехслойной конструкции

В качестве второго примера рассмотрим четырехслойную дорожную одежду, параметры которой также приведены в приложении “Д” ГОСТа (табл. 4):

Таблица 4

Номер слоя	Материал слоя	Толщина, см	Модуль упругости, МПа	Коэффициент Пуассона	Плотность слоя, кг/м ³
1	Асфальтобетон	25	2400	0.35	2400
2	Щебеночно-песчаная-цементная смесь	25	700	0.35	2000
3	Песок	30	120	0.35	1600
4	Грунт-суглинок	0	41	0.35	2000

Таблица 5 содержит оценки вероятностей определения эталонных модулей слоев из табл. 4, при помощи обратного расчета по искаженной “помехами” чаше прогиба. Анализ результатов показывает, что достоверность определения модулей упругости обратным расчетом для четырехслойной одежды гораздо ниже, чем для трехслойной. Наибольшая вариабельность присутствует у модулей основания E_2 и E_3 – в частности, для 10% уровня искажений чаши отклонение модуля E_3 от эталонного было более чем десятикратным в 9% расчетов.

Таблица 5

Уровень искажений α	10%				5%			
	Кратность	1.1	1.25	1.5	2	1.1	1.25	1.5
E_1	0.16	0.41	0.71	0.97	0.36	0.71	0.96	1
E_2	0.073	0.18	0.32	0.53	0.15	0.32	0.54	0.82
E_3	0.052	0.11	0.21	0.38	0.11	0.25	0.43	0.69
E_4	0.40	0.75	0.90	0.98	0.79	0.98	1	1
E_1, E_2, E_3, E_4	0.0011	0.039	0.14	0.33	0.042	0.17	0.38	0.66

Согласно табл. 5, даже при 5% уровне искажений чаши с большой точностью определяется только модуль E_4 земляного полотна и с удовлетворительной – модуль асфальтобетона E_1 . Доверительные интервалы для модулей E_2 и E_3 слоев оснований даже для надежности около 0.5 оказываются слишком широкими и включают в себя область двукратного изменения в сравнении с эталонным значением как в большую, так и в меньшую стороны. Для того чтобы значения E_2 и E_3 можно было использовать для обоснованного принятия решения о текущем состоянии дорожной конструкции, необходимо уменьшить уровень “помех”, искажающих экспериментально измеренные чаши, до уровня не более 1-2%, по крайней мере для трех первых датчиков прогиба.

Обсуждение результатов

Полученные результаты, на первый взгляд, выставляют метод обратного расчета модулей упругости слоев дорожной одежды по измеренной чаше прогиба как ненадежный способ мониторинга, в

особенности, если число слоев больше трех. В данном исследовании для обратных расчетов использовались чаши, отличающиеся от эталонной ровно на заданный процент α , принимавшийся равным 5% или 10%. В реальности, во-первых, множество факторов, способствующих искажению чаши, приведут к варьированию искажений в некотором диапазоне от нуля до α . Во-вторых, при численном моделировании вероятность “помех” на всех датчиках прогиба принималась одинаковой – при реальных испытаниях эту вероятность для трех первых датчиков, к показаниям которых наиболее чувствительны результаты расчетов, можно существенно снизить, используя, скажем, дублирование датчиков. Поэтому вероятность достоверного определения модулей в реальности должна быть выше, чем в проведенном численном моделировании.

Тем не менее, вариабельность вычисления упругих параметров достаточно свежих дорожных одежд, не имеющих видимых дефектов покрытия, пока еще слишком высока. Так, в работе [6] приводится диаграмма изменения общего модуля упругости дорожной одежды, зарегистрированного с использованием установки ударного нагружения. Измерения проводились с шагом 100 м на 7-ми километровом эксплуатируемом участке автомобильной дороги М-4 «ДОН» и показывают отличие максимума показателя от минимума в 2.7 раза. Между тем общий модуль упругости, усредняющий в какой-то мере модули упругости по слоям, должен отличаться меньшей дисперсией, чем послойные модули. Несмотря на наличие ГОСТ Р 59918-2021, регламентирующего процедуру измерения и расчета послойных модулей упругости, рекомендации по интерпретации результатов расчетов пока отсутствуют. Насколько можно судить по публикациям научной группы Донского технического университета в составе Е.В. Угловой, А.Н. Тиратурияна, А.А. Ляпина и других, опирающимся на обширные экспериментальные исследования и численные моделирования [6-9],

послойные модули упругости не расцениваются как надежный индикатор состояния дорожной конструкции в данном ее сечении; только серия измерений на протяжении некоторого участка дороги с последующей оценкой средних величин и дисперсии может дать надежную информацию о состоянии дорожной одежды. Цель наших исследований состоит в установлении причин упомянутой variability с последующей выработкой рекомендаций по изменению процесса измерения и обработки полученной при этом измерении информации, пригодной для оценки локального состояния одежды в заданном сечении.

Список литературы

1. Система измерения прочности дорожных одежд «Дина-4». – URL: <http://sdtech.ru/store/lab/trassa/dina-3m.html>
2. ГОСТ Р 59918-2021 Дороги автомобильные общего пользования. Нежесткие дорожные одежды. Методики оценки прочности. – URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200181995>
3. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика. Т. VII. Теория упругости / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1987.
4. Лаврентьев, М.М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М.М. Лаврентьев, В.Г. Романов, С.П. Шишатский. – М.: Наука, 1980.
5. Lee, Y.-H. Study of backcalculated pavement layer moduli from the LTPP database / Y.-H. Lee, H.-W. Ker, C.-H. Lin, P.-H. Wu // *Tamkang Journal of Science and Engineering*. – 2010. – Т. 13, No. 2. – P. 145-156.
6. Углова, Е.В. Оценка влияния толщин слоев нежестких дорожных одежд на их напряженно-деформированное состояние / Е.В. Углова, А.Н. Тиратурян // Интернет-журнал «Транспортные сооружения». – 2015. – Т. 2. – №4.
7. Тиратурян, А.Н. Программный комплекс для «Обратного» расчета динамических модулей упругости эксплуатируемых дорожных конструкций с учетом параметров воздействия установок нагружения дорожных одежд / А.Н. Тиратурян, Е.В. Углова // *Вестник евразийской науки* – 2012. – Т.12. – №3.
8. Тиратурян, А.Н. Оценка деградации прочности нежестких дорожных конструкций на основе натуральных измерений на участке автомобильной дороги М4 «Дон» П. Тарасовский / А.Н. Тиратурян, С.А. Ольховой // *Инженерный Вестник Дона*. – 2017. – Т. 45, №2.

9. Углова, Е.В. Комплексный подход к исследованию характеристик динамического деформирования на поверхности нежестких дорожных одежд с использованием методов неразрушающего контроля / Е.В. Углова, А.Н. Тиратурян, А.А. Ляпин // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Механика. – 2016. – № 2. – С. 111–130.

References

1. URL: <http://sdtech.ru/store/lab/trassa/dina-3m.html>
2. URL: <https://docs.cntd.ru/document/1200181995>
3. Landau L.D., Lifshits E.M. *Teoreticheskaya fizika. T. VII. Teoriya uprugosti* (Theoretical physics. VII. Theory of elasticity), Moscow, Nauka, 1987.
4. Lavrentiev M.M., Romanov V.G., Shishatsky S.P. *Nekorrektno postavlennyye zadachi matematicheskoi fiziki i analiza* (Ill-posed problems of mathematical physics and analysis), Moscow, Nauka, 1980.
5. Lee Y.-H., Ker H.-W., Lin C.-H., Wu P.-H. Study of backcalculated pavement layer moduli from the LTPP database, *Tamkang Journal of Science and Engineering*, 2010, V. 13, No. 2, pp. 145-156.
6. Uglava E.V., Tiraturyan A.N. *Internet-zhurnal «Transportnyye sooruzheniya»*, 2015, Vol. 2, no. 4.
7. Tiraturyan A.N., Uglava E.V. *Vestnik yevraziyskoy nauki*, 2012, Vol.12, no 3.
8. Tiraturyan A.N., Olkhova S.A. *Inzhenernyy Vestnik Dona*, 2017, Vol. 45, no. 2.
9. Uglava E.V., Tiraturyan A.N., Lyapin A.A. *Vestnik Permskogo natsional'nogo issledovatel'skogo politekhnicheskogo universiteta. Mekhanika*, 2016, no. 2, pp. 111–130.

Рецензент: А.И. Землянухин, д-р физ.-мат. наук, проф., Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.